

NEW SYSTEMS

di RAFFAETA' Ing. ROBERTO
Via Verdi 39 - 38080 CARISOLO (TN)
Tel: 0465 - 502 696
e-mail: newsystems @ c r - surfing.net



FOGLIO N.

0

Data

OTT 2010

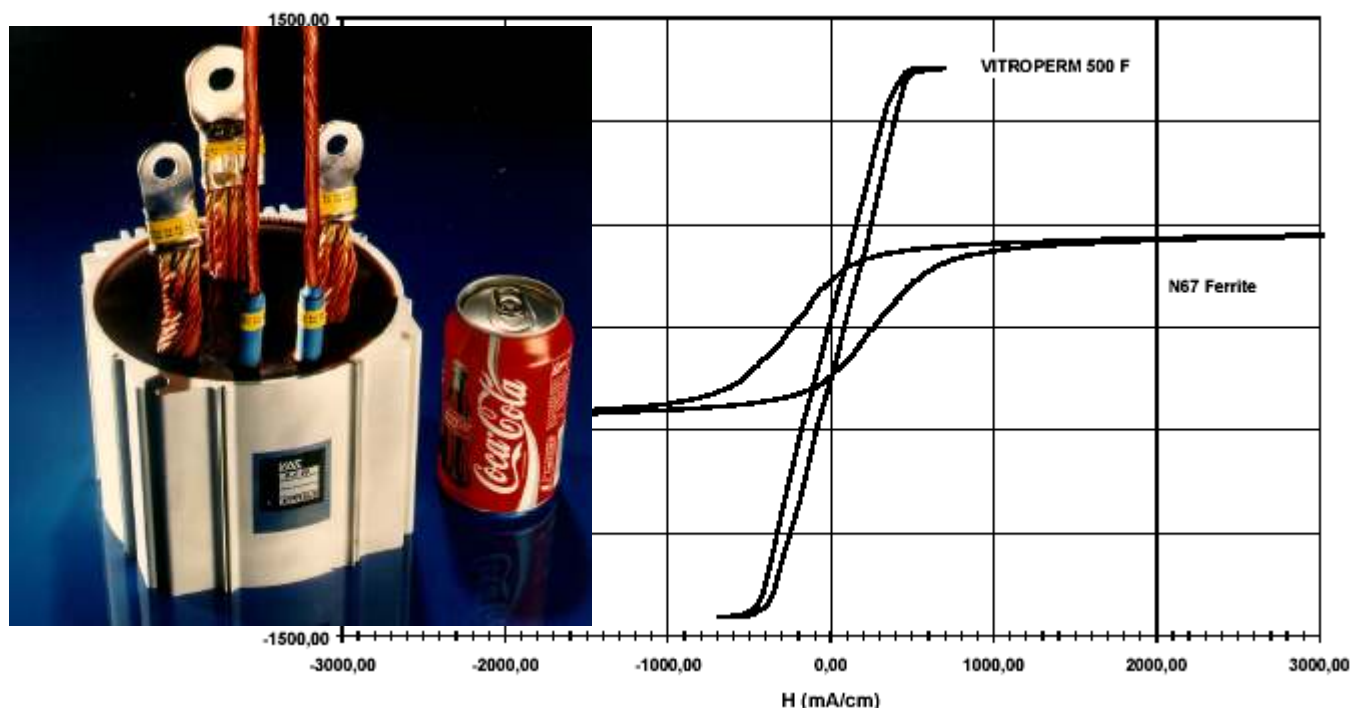
C I R C U I T I M A G N E T I C I E L E M E N T A R I

INDUTTORI & TRASFORMATORI

CHOPPER & INVERTER

VETTORI e loro MODULAZIONE

INJECTION on the GRID



By Prof. Dott. **Ing. Roberto RAFFAETA' - NEW SYSTEMS**

La presente concisa trattazione considera molteplici aspetti tecnici e scientifici inerenti la conversione dei parametri di potenza elettrica per le più disparate applicazioni compresi i settori dell'eolico e del fotovoltaico che sono allo stato attuale in forte sviluppo.

Ben lungi dal considerarla un trattato teorico accademico, si prendono in considerazione soprattutto gli aspetti pratici di ognuna delle poche tematiche descritte, per agevolare i Tecnici dei vari settori nello svolgimento di compiti di ricerca, dimensionamento e progettazione di apparati ed impianti.

Si è cercato di dare maggior enfasi alle soluzioni innovative in genere poco note in ambito ingegneristico classico.

Specie nella parte finale vengono riportate parti riassuntive utilizzabili come manualetto di consultazione per Tecnici già esperti.

INDICE per ARGOMENTI

FONDAMENTI di ELETTROMAGNETISMO	pag. 2 - 4
TRASFORMATORI HF	pag. 5 - 12
Cenni ai CONVERTITORI	pag. 13
INDUTTORI HF e FILTRI LC	pag. 14 - 17
INVERTER MONOFASE & TRIFASE	pag. 18 - 19
VETTORI e loro GESTIONE	pag. 20 - 22
INJECTION on the GRID	pag. 23 - 24
DETERMINAZIONE di AMPIEZZA e FASE	pag. 25 - 29
FILTRI CANONICI e INNOVATIVI	pag. 30 - 45
Cenni di IDENTIFICAZIONE PARAMETRICA	pag. 46 - 47
SVILUPPI di FOURIER	pag. 48 - 50
CIRCUITI e IMPEDENZE OPERAZIONALI	pag. 51 - 52
DINAMICHE del 1° ORDINE	pag. 53 - 56
ANALOGIA TERMODINAMICA	pag. 57
CONDUTTORI e SKIN EFFECT	pag. 58 - 60
Fondamenti di CALCOLO MATRICIALE	pag. 61 - 62

Nel concludere desidero ringraziare il dott. Ing. Aldo Turco della SISRAM di Milano ed i suoi più stretti collaboratori per la preziosa opera prestatami nella ricerca di materiali magnetici ad altissime prestazioni e nella chiara comprensione dei loro innegabili vantaggi.

Di primaria importanza sono le SOLUZIONI, non i Problemi ...

Per un semplice studio approssimato di **CIRCUITI ELETTRICI** conviene operare per **ANALOGIA** con lo studio di un **CIRCUITO EQUIVALENTE ELETTRICO**.

GRANDEZZA MAGNETICA	Relazione	Analogia ELETTRICA	
Forza Magnetomotrice [Asp]	$M = \mathfrak{R} * \Phi$	TENSIONE	$V = R * I$
RILUTTANZA [1/H]	$\mathfrak{R} = M / \Phi$	RESISTENZA	$R = V / I$
FLUSSO [Wb]	$\Phi = M / \mathfrak{R}$	CORRENTE	$I = V / R$
PERMEANZA [H]	$\Lambda = 1 / \mathfrak{R}$	CONDUTTANZA	$G = 1 / R$
Intensità di CAMPO [Asp/m]	$H = M / l$	Campo Elettrico	[V / m]
INDUZIONE [Wb/m ²]	$B = \Phi / A$	Densità di corrente	[A / m ²]
PERMEABILITA' [H/m]	$\mu = B / H$	Conduttività	$\gamma = G l / A$

Le unità di misura indicate sono quelle del **Sistema Internazionale** ; purtroppo in alcune pubblicazioni si utilizzano ancora unità di misura diverse ; valgono le seguenti identità :

INDUZIONE B **1 Wb / m² = 1 Tesla = 10000 Gauss**
Intensità di CAMPO H **1 Oersted = 79,6 Asp / m**

Ricordiamo inoltre le seguenti definizioni di alcune grandezze elettromagnetiche :

1 Wb = 1 V * s **1 H = 1 Wb / A** **1 C = 1 F * V** **1 A = 1 C / s ≈ 6,242 * 10¹⁸ e/s**

PERMEABILITA' (Capacità di condurre il Flusso Magnetico)

Permeabilità del Vuoto : $\mu_0 \approx 1,2566 * 10^{-6} \text{ H / m}$ ($\mu_0 = 4 \pi * 10^{-7} \text{ H / m}$)

Mentre μ_0 è una costante assoluta e ben definita , la permeabilità di un generico materiale è **fortemente variabile anche in funzione delle condizioni operative** e viene generalmente espressa tramite l'adozione della **Permeabilità Relativa μ_r** che è un numero adimensionale che moltiplicato per μ_0 ci da la **Permeabilità** di un dato materiale : $\mu = \mu_r * \mu_0$

I materiali, funzione di μ_r si definiscono **DIAMAGNETICI** ($\mu_r < 1$ Es. Argento e Rame) , **PARAMAGNETICI** ($\mu_r > 1$ Es. Aria, Alluminio, Platino) e **FERROMAGNETICI** se $\mu_r \gg 1$
Per applicazioni di potenza si utilizzano generalmente i Ferromagnetici con μ_r sino a 30000

Dato un certo materiale, la **PERMEABILITA' $\mu = B / H$** varia in funzione di B & H !!!

Per ogni materiale viene dato in un piano H B la curva di prima magnetizzazione ed il relativo ciclo di isteresi dovuto al fatto che il punto operativo attuale dipende anche dalla storia precedente.

Il **Prodotto B * H** ha le dimensioni di una **Energia Relativa al Volume** espressa in J / m³ .

Dimensionalmente : $B * H = \text{Wb / m}^2 * \text{A / m} = \text{V * s * A / m}^3 = \text{W * s / m}^3 = \text{J / m}^3$.

Si può quindi capire che una Area in un piano H B rappresenta una Energia relativa al Volume.

Ogni volta che noi percorriamo un ciclo di isteresi , dissipiamo una Energia proporzionale all'area del ciclo; sapendo che la Potenza è Energia / Tempo (1 J = 1 W / s) possiamo dedurre che la Potenza Dissipata sarà proporzionale all' area del ciclo di isteresi ed alla frequenza operativa (1 Hz = 1 / s).

Questa Energia verrà dissipata come Calore nel nucleo ferromagnetico ; la Potenza associata a questa dissipazione produrrà una Sovratemperatura del Nucleo in funzione della sua Rth ; per minimizzare questo nefasto effetto bisognerà scegliere un nucleo con alta permeabilità ma soprattutto con ciclo di isteresi di area molto limitata ed opportunamente dimensionato volumetricamente.

L'area del ciclo di isteresi dipende anche dalla variazione massima di induzione ΔB_{max} adottata !

Fortunatamente (quasi tutte) le case produttrici di nuclei forniscono tutti i dati necessari.

Consideriamo un semplice **INDUTTORE** con nucleo traferrato. Siano noti i seguenti parametri:

I = 20 A **N = 100 spire** da cui si ricava facilmente **M = N * I = 2000 Asp**
A=100 mm²=100*10⁻⁶ m² **l_δ=5 mm=0,005 m** **l_{fe} = 15 cm = 0,15 m** **μ=3000**

$\Lambda_{fe} = \mu A / l_{fe} = 3000 * 4 \pi * 10^{-7} * 100 * 10^{-6} / 0,005 = 2513,3 \text{ nH}$ $\mathfrak{R}_{fe} = 1/\Lambda_{fe} = 397,883 * 10^3 \text{ H}^{-1}$
 $\Lambda_{\delta} = \mu_0 A / l_{\delta} = 4 \pi * 10^{-7} * 100 * 10^{-6} / 0,005 = 25,133 \text{ nH}$ $\mathfrak{R}_{\delta} = 1/\Lambda_{\delta} = 39788,3 * 10^3 \text{ H}^{-1}$

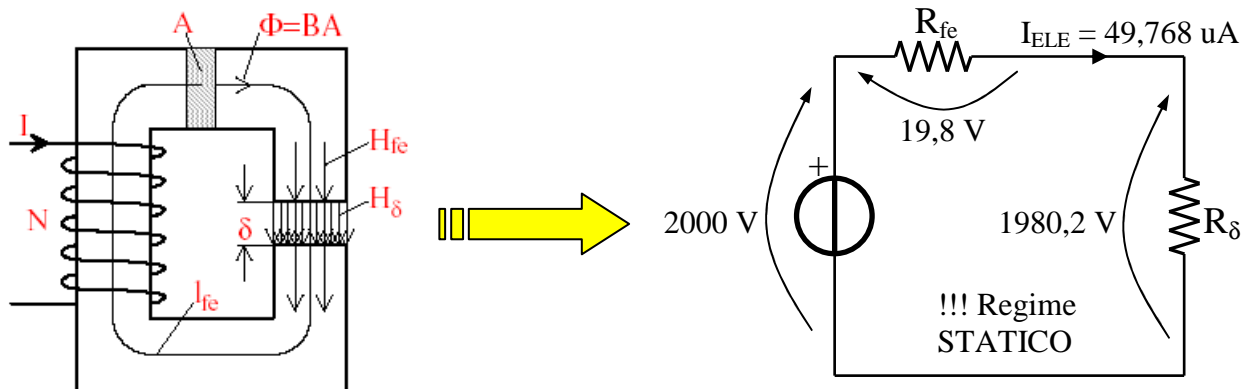
Per **Analogia Elettrica** $\Rightarrow R_{fe} = 397,883 * 10^3 \Omega$ $R_{\delta} = 39788,3 * 10^3 \Omega$ $R_{TOT} = 40186,2 * 10^3 \Omega$

$I_{ELE} = V_{ELE} / R_{TOT} = 2000 / (40186,2 * 10^3) = 49,768 * 10^{-6} \text{ A}$ $G_{TOT} = 1/R_{TOT} = 24,884 * 10^{-9} \text{ S}$

$V_{fe} = R_{fe} * I_{ELE} = 19,8 \text{ V}$ $V_{\delta} = R_{\delta} * I_{ELE} = 1980,2 \text{ V}$ $P_{ETOT} = V_{ELE} * I_{ELE} = 99,536 \text{ mW}$

$P_{Efe} = V_{fe} * I_{ELE} = 0,985 \text{ mW}$ $P_{E\delta} = V_{\delta} * I_{ELE} = 98,551 \text{ mW}$ $P_{ETOT} = P_{Efe} + P_{E\delta}$

Il circuito viene svolto in regime statico (C.C.); ognuno adotta il metodo che gli pare più semplice.



Ritornando al **Circuito Magnetico** otteniamo il **Flusso** $\Phi = 49,768 * 10^{-6} \text{ Wb}$ (analogo di I_{ELE}) e quindi l' **Induzione** $B = \Phi / A = 49,768 * 10^{-6} / (100 * 10^{-6}) = 0,49768 \text{ Wb/m}^2 = 4976,8 \text{ Gauss}$

La **Permeanza** totale del circuito è $\Lambda = 24,884 * 10^{-9} \text{ H}$ (analogo di G_{TOT}); tale valore coincide con la **Induttanza Relativa** ad una spira (valore spesso fornito dai costruttori come A_L); per ottenere la **Induttanza** per N spire si applica la formula $L = N^2 * \Lambda = 100^2 * 24,884 * 10^{-9} = 248,84 * 10^{-6} \text{ H}$

Intensità di Campo: $H_{fe} = M_{fe} / l_{fe} = 19,8 / 0,15 = 132 \text{ A/m}$ $H_{\delta} = M_{\delta} / l_{\delta} = 1980,2 / 0,005 = 396 * 10^3 \text{ A/m}$
Notare che $H_{\delta} / H_{fe} = 3000$ dato che $M_{\delta} / M_{fe} = 100$ e $l_{fe} / l_{\delta} = 30$

Energie accumulate: $E_{fe} = \frac{1}{2} M_{fe} * \Phi = 0,49255 \text{ mJ}$ $E_{\delta} = \frac{1}{2} M_{\delta} * \Phi = 49,2755 \text{ mJ}$

Notare che $E_{\delta} / E_{fe} = 100$ dato che $M_{\delta} / M_{fe} = 100$ mentre Φ e B sono unici nel circuito.

Energia Totale accumulata nell'induttore: $E = E_{fe} + E_{\delta} = \frac{1}{2} M * \Phi = 49,768 \text{ mJ}$

La Energia può essere calcolata anche come $E = \frac{1}{2} L * I^2 = 49,768 \text{ mJ}$

Il circuito Elettrico Equivalente può inoltre fornirci per analogia le Energie accumulate a partire dalle Potenze elettriche dissipate, dimezzandone il loro valore: $E_{fe} = \frac{1}{2} P_{Efe}$ $E_{\delta} = \frac{1}{2} P_{E\delta}$ $E = \frac{1}{2} P_{ETOT}$

Dato che $\Phi = M / \mathfrak{R} = M * \Lambda = N * I * \Lambda$, definendo il **Flusso Concatenato con N spire** come $\Phi_c = N * \Phi = N^2 * I * \Lambda$ e sapendo che $L = N^2 * \Lambda$, otteniamo le relazioni: $\Phi_c = L * I$ $L = \Phi_c / I$

Nel ns. Esempio $\Phi_c = 4,9768 \text{ mWbsp}$ $L * I = 248,84 * 10^{-6} * 20 = 4,9768 \text{ mWbsp} = \Phi_c$

In un **Induttore Ideale** (con L costante) il **Flusso** Φ , che è proporzionale alla Forza Magnetomotrice M che lo ha generato, è una **grandezza Conservativa** nel senso che tende a mantenere costante la sua Energia totale $E = \frac{1}{2} L * I^2$ e quindi tende a (mantenere costante) **inerzializzare la Corrente I**.

Come vedremo nella trattazione dinamica, la Corrente I e quindi anche il Flusso Φ non possono variare istantaneamente perché per fare ciò sarebbe necessaria una Tensione V infinita; alimentando lo induttore con una certa tensione V costante otterremo che I & Φ saliranno con una rampa di pendenza costante mentre l' Energia E salirà con andamento parabolico: $\int I * t dt = \frac{1}{2} * I * t^2$

Questo fatto spiega per le Energie la presenza del termine $\frac{1}{2}$ nel passaggio dal circuito equivalente elettrico (statico e non inerziale) al circuito magnetico che considera dei termini dinamici inerziali.

Nei sistemi fisici inerziali del primo ordine compare sempre il termine $\frac{1}{2}$ nelle espressioni energetiche.

Relazione dinamica di base per un Induttore ideale : $V = L * dI / dt$

Da questa si deduce che applicando una tensione **V costante** e positiva ad un circuito utilizzatore L ideale , avremo una salita della corrente **I** a rampa **con pendenza costante**: $dI / dt = V / L$

Sapendo che $\Phi_c = N * \Phi$ e che $\Phi_c = L * I$ otteniamo $V = d\Phi_c / dt$ che ci conferma la relazione relativa alla legge sulla f.e.m. generata da una variazione di flusso concatenato: $e = - d\Phi_c / dt$, dove compare il segno meno perché si considera un circuito generatore e non un circuito utilizzatore.

Introducendo l'operatore di **Laplace** (s per derivare , 1/s per integrare) otteniamo: $V = s * L * I$
Per ottenere una equazione alle **differenze finite** potremo porre $s = \Delta / \Delta t$ e studiare il circuito con tensioni e correnti arbitrariamente variabili in funzione del tempo mentre **solo in regime stazionario sinusoidale** potremmo operare la sostituzione $s = j \omega$, dove $\omega = 2 \pi f$; solo in questo caso particolare $V = j \omega L * I$ dove il termine $j \omega L$ rappresenta la ben nota reattanza induttiva $X_L = j 2 \pi f * L$

Se il circuito contiene anche capacità esiste la relazione duale $I = C * dV / dt$ da cui si può dedurre che mentre un Induttore L tende a mantenere costante la Corrente I che lo attraversa ($E_L = 1/2 L I^2$) , un Condensatore C tende a mantenere costante la Tensione ai suoi capi ($E_C = 1/2 C V^2$).

Come **Esempio** consideriamo un **Nucleo Magnetico** con : $A_L = 0,25 \text{ uH}$ $A_{fe} = 2 \text{ cm}^2$

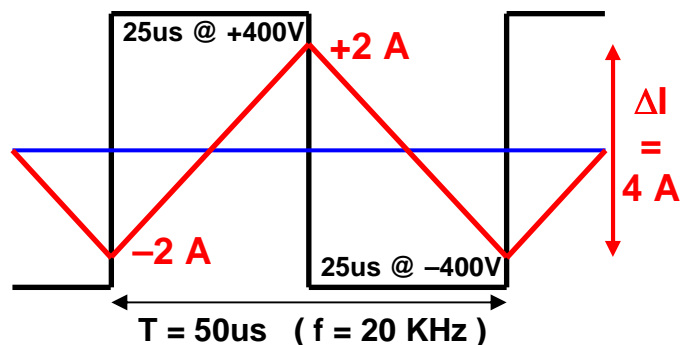
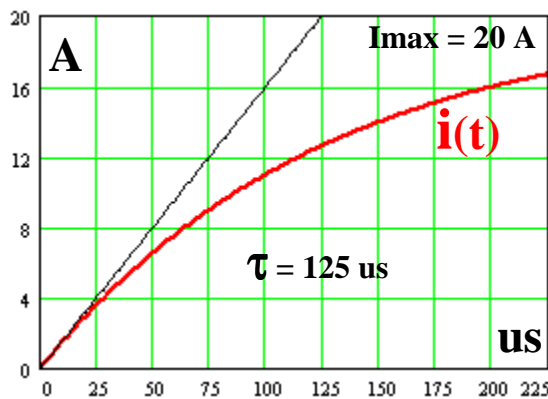
Volendo realizzare in induttore con $L = 2,5 \text{ mH}$ calcoliamo il numero di spire necessarie:

$L = N^2 * A_L$ quindi $N = \sqrt{L / A_L} = \sqrt{(2,5 * 10^{-3} / 0,25 * 10^{-6})} = 100$ **N = 100 spire**

Realizziamo l'avvolgimento magnetizzante con 100 spire di rame che hanno una resistenza **R=20 Ω**

Alimentando l'induttore con $V = 400 \text{ V}$ avremmo una corrente di regime $I_{max} = V / R = 20 \text{ A}$.

In un circuito serie LR la costante di tempo è $\tau = L / R$; nel nostro caso $\tau = 125 \text{ us}$; il transitorio della corrente sarà quindi di tipo esponenziale con $i(t) = I_{max} * (1 - e^{-t/\tau})$ e con derivata iniziale uguale a $I_{max} / \tau = 20 / (125 * 10^{-6}) = 0,16 \text{ A / us}$; considerando la relazione dinamica di base vista precedentemente otteniamo : $\Delta I / \Delta t = V / L = 400 / (2,5 * 10^{-3}) = 0,16 \text{ A / us}$; Ok identico !



Alimentiamo ora l'induttore con una **Onda Quadra di Tensione @ 20 KHz** con 400V di picco ; la corrente magnetizzante sarà molto simile ad una rampa con $\Delta I / \Delta t = 0,16 \text{ V/us}$ che varierà fra $\pm 2 \text{ A}$ generando una **Onda Triangolare** con 2 A di picco. Il **Flusso Concatenato** (e quindi anche B) sarà proporzionale alla Corrente dato che $\Phi_c = L * I$, quindi $\Delta \Phi_c = L * \Delta I = 2,5 * 10^{-3} * 4 = 10 \text{ mWb}$ da cui possiamo ottenere la variazione di Flusso $\Delta \Phi = \Delta \Phi_c / N = 0,1 \text{ mWb}$, conoscendo la superficie netta del ferro A_{fe} otteniamo $\Delta B = \Delta \Phi / A_{fe} = 0,1 * 10^{-3} / (2 * 10^{-4}) = 0,5 \text{ Wb/m}^2 = 5000 \text{ Gauss}$

In questo esempio sia V che I hanno valor medio nullo ; l'induzione B varia fra $\pm 0,25 \text{ Wb/m}^2$

Se ora concateniamo il flusso Φ con 1 spira avremo (a vuoto) una forza elettromotrice indotta ad onda quadra con valore di picco $e = - \Delta \Phi / \Delta t = - 0,1 * 10^{-3} / (25 * 10^{-6}) = - 4 \text{ V}$; abbiamo realizzato un **Trasformatore** che a vuoto può generare una **Tensione ad Onda Quadra @ 20 KHz** con ampiezza di 4 V/spira ; se avvolgiamo N spire possiamo ottenere a vuoto una qualsiasi tensione $e = N * 4 \text{ V}$.

Nell' esempio precedente è stato posto $R = 20 \Omega$ solo per esigenze didattiche, in realtà si cerca di minimizzare R per ottenere basse cadute di tensione e potenza dissipata; anche per R tendente a 0 le relazioni date non cambiano; dato che $I_{max} = V / R$ e $\tau = L / R \rightarrow I_{max} / \tau = V / L = \Delta I / \Delta t$; detto ciò possiamo trattare un **circuito magnetico ideale** prescindendo da R o al limite ponendo $R=0$.

Possiamo concepire un **Trasformatore Ideale** avvolgendo su di un nucleo di nota **Permeanza Λ** un primo avvolgimento di N_1 spire (Primario) alimentato in tensione per creare una corrente magnetizzante ed un secondo avvolgimento di N_2 spire (Secondario) atto a fornire tensione ad un generico carico; supponiamo che il **flusso sia perfettamente concatenato con entrambe gli avvolgimenti** e che quindi **non esistano flussi dispersi**. Sotto queste ipotesi avremo ora due

induttanze o per essere più precisi due valori di **Autoinduttanza**: $L_1 = N_1^2 * \Lambda$ e $L_2 = N_2^2 * \Lambda$ che legano il flusso concatenato $\Phi_c = N * \Phi$ alla propria corrente $L_1 = \Phi * N_1 / I_1$ e $L_2 = \Phi * N_2 / I_2$

La relazione che lega il flusso concatenato con entrambe gli avvolgimenti alla corrente magnetizzante generata dall'altro avvolgimento viene definita **Mutua Induttanza**: $M_{12} = \Phi * N_1 / I_2 = \Phi * N_2 / I_1$

Ne consegue che $M_{12} = L_1 * I_1 / I_2 = L_2 * I_2 / I_1$ e $N_1 / N_2 = I_2 / I_1$; questa ultima relazione spiega come una corrente secondaria I_2 erogata su di un carico richiami una corrente primaria I_1 inversamente proporzionale al rapporto spire $N_1 / N_2 = K$, il rapporto K viene chiamato rapporto di trasformazione.

Si ricava inoltre: $M_{12} = L_1 / K = L_2 * K$ quindi $M_{12}^2 = L_1 * L_2$ da cui $M_{12} = \sqrt{L_1 * L_2}$; il valore della Mutua Induttanza è quindi la media geometrica delle 2 Autoinduttanze e vale $M_{12} = N_1 * N_2 * \Lambda$

In un circuito ideale con 2 avvolgimenti concatenati con lo stesso flusso e quindi con le stesse variazioni di flusso avremo una f.e.m. indotta identica per ogni spira $e = - \Delta \Phi / \Delta t$, quindi a vuoto avremo le condizioni $V_1 = e * N_1$ e $V_2 = e * N_2$ da cui otteniamo $V_1 / V_2 = N_1 / N_2 = K$

In un trasformatore ideale (esente quindi da cadute di tensione e dissipazioni) la potenza assorbita dal carico P_2 sarà uguale alla potenza primaria P_1 ; $V_1 * I_1 = V_2 * I_2$, da cui $V_1 / V_2 = I_2 / I_1 = K$

In pratica quindi il trasformatore (se $K \neq 1$) opera al primario una **trasformazione dell'impedenza del carico applicato al secondario**; possiamo quindi riportare al primario una generica impedenza secondaria semplicemente moltiplicandola per K^2 perché K altera sia la tensione che la corrente e quindi $Z_1 = V_1 / I_1 = (K * V_2) / (I_2 / K) = Z_2 * K^2$

Si riassumono le principali relazioni valide per un Trasformatore Ideale:

Rapporto di Trasformazione: **$K = N_1 / N_2 = V_1 / V_2 = I_2 / I_1$** (Abbassatore se $K > 1$)

Riportare al primario Z_2 : **$Z_{1eq} = Z_2 * K^2$**

F.e.m. Indotta in una spira: **$e = - \Delta \Phi / \Delta t = - A_{fe} * \Delta B / \Delta t$**

Corrente Magnetizzante: **$\Delta I_M / \Delta t = V_1 / L_1 = (- e * N_1) / L_1$**

Autoinduttanza Primaria: **$L_1 = N_1^2 * \Lambda = N_1^2 * \mu * A_{fe} / l$**

Forze Magnetomotrici: **$M_1 = N_1 * I_1$ $M_2 = N_2 * I_2$**

La relazione $I_2 / I_1 = K$ vale solo per un **trasformatore perfettamente ideale** dove il nucleo è considerato avere una **permeanza Λ infinita** (e quindi anche L_1 infinita) in modo che per instaurare il Flusso la **Corrente Magnetizzante I_M tenda ad essere nulla** (in questo caso si ottiene una perfetta eguaglianza delle Forze Magnetomotrici primaria e secondaria); in un trasformatore pseudoideale si considera un nucleo con permeanza altissima in modo da ottenere una L_1 molto grande con la conseguenza di avere una I_M molto piccola rispetto a I_1 ; in questo caso pseudoideale $I_1 = I_2 / K + I_M$

Il progetto di un trasformatore reale parte da una prima approssimazione del caso pseudoideale per poi introdurre tutte le considerazioni relative alle cadute di tensione ed alle dissipazioni di potenza.

Golden Rules: Un trasformatore ad alto rendimento assomiglia molto ad un pseudoideale.

Più alta è la Potenza Nominale di un trasformatore e più alto è il suo rendimento.

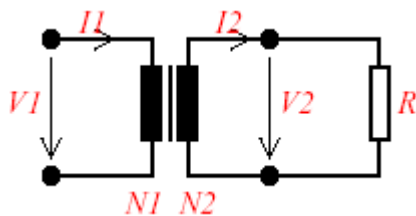
Consideriamo ora un trasformatore **Pseudoideale** dove consideriamo per ora nulle le resistenze R_1 e R_2 degli avvolgimenti primario e secondario ma che adotta un nucleo magnetico reale con una certa permeanza non nulla e ben definita.

Per generare il flusso magnetizzante occorrerà quindi una certa corrente magnetizzante I_M non nulla ma certamente minore delle correnti primaria e secondaria I_1 e I_2 .

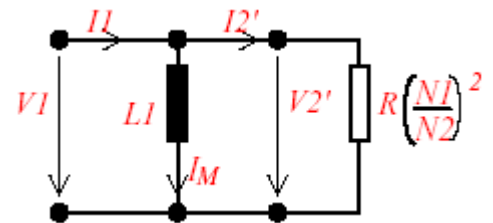
Se consideriamo il nostro trasformatore a vuoto (senza alcun carico al secondario) e lo alimentiamo con una tensione primaria V_1 ad Onda Quadra, otterremo una corrente magnetizzante I_M con forma d'onda triangolare, come abbiamo già visto negli esempi precedenti.

Al secondario otterremo una tensione V_2 , pur essa ad Onda Quadra.

A questo punto se applichiamo al secondario un carico resistivo R otterremo una corrente secondaria I_2 pure ad onda quadra e tale che in ogni istante $I_2 = V_2 / R = (V_1 / R) * (N_2 / N_1)$.



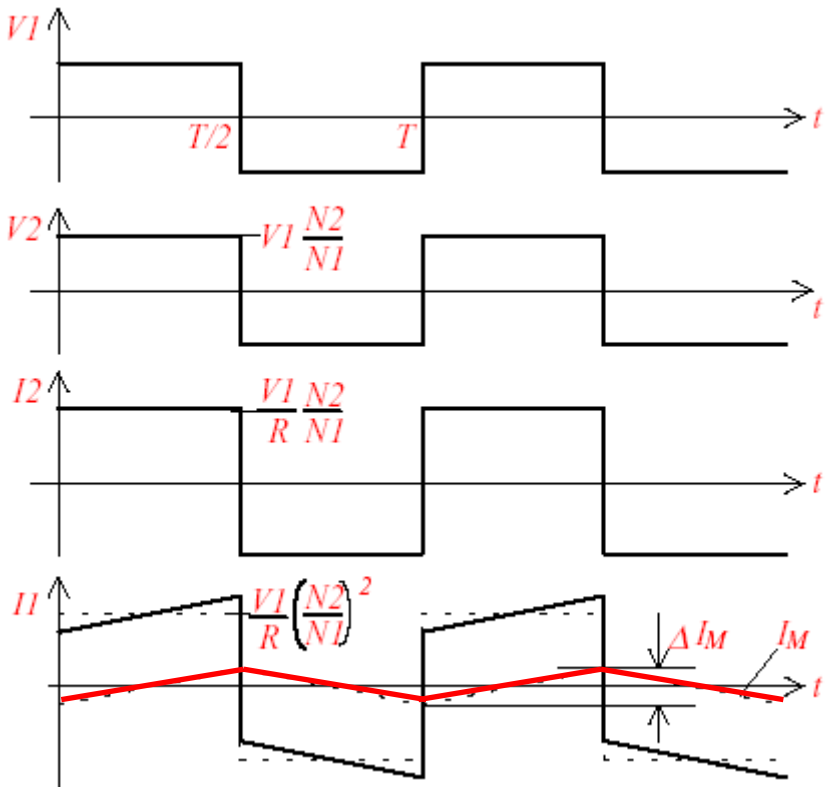
Riportando al Primario il carico Secondario R otteniamo un Circuito Equivalente Primario



Il circuito equivalente primario ci permette di capire che la corrente primaria I_1 sarà la somma della corrente secondaria I_2 dovuta al carico R e della corrente magnetizzante I_M .

La presenza nella corrente primaria I_1 di una grande componente quadra ed una piccola componente triangolare sarà tale da generare una forma d'onda particolare e simile a quella rappresentata nel grafico in basso qui a lato.

In regime sinusoidale pure la I_M è sinusoidale ed allineata con il flusso e quindi sfasata di 90° in ritardo rispetto a V_1 ; in questo caso avremo solo uno sfasamento rispetto alla direzione della I_2 , ma nessuna distorsione.



In questa trattazione semplificata si sono inoltre trascurati tutti i flussi dispersi (cioè non reciprocamente concatenati) di primario e secondario, che nel circuito equivalente si ritrovano come Induttanze di Dispersione L_{d1} & L_{d2} , che insieme ad R_1 e R_2 provocano cadute di tensione sia primarie che secondarie che andranno studiate per un regime qualsiasi dato che l'usuale concetto di Reattanza ed Impedenza è valido solo in regime puramente sinusoidale.

Per il progetto di massima di un HF Transformer adotteremo per ora di questo modello semplificato ma che potrà essere corretto in parte da metodi empirici.

Da quanto visto precedentemente possiamo affermare che la corrente magnetizzante I_M è praticamente indipendente dalle correnti primaria e secondaria I₁ & I₂ ma è, in prima approssimazione, proporzionale al Flusso Φ ed, una volta determinata la sezione netta di ferro del nucleo A_{fe}, è proporzionale alla Induzione B = Φ * A_{fe}.

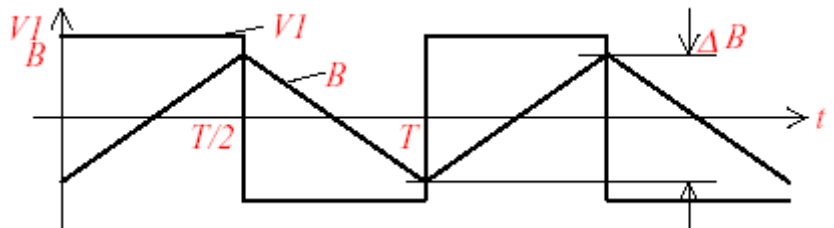
A parità di Tensione e Frequenza, per minimizzare la I_M, conviene adottare nuclei ad alta permeabilità e senza traferri in modo da ottenere alti valori di L_M; basti ricordare che ΔI_M / Δt = V / L_M e quindi a parità di V e Δt otteniamo che la ΔI_M è inversamente proporzionale a L_M

Alimentando il primario con Onda Quadra di ampiezza V₁ otteniamo: V₁ = N₁ * ΔΦ / Δt

Dato che: ΔΦ = ΔB * A_{fe}, Δt = T / 2 → 1 / Δt = 2 / T = 2 * f otteniamo: V₁ = N₁ * 2 * f * ΔB * A_{fe}

$$\Delta B = \frac{V_1}{N_1 \cdot 2 \cdot f \cdot A_{fe}}$$

$$N_1 = \frac{V_1}{\Delta B \cdot 2 \cdot f \cdot A_{fe}}$$

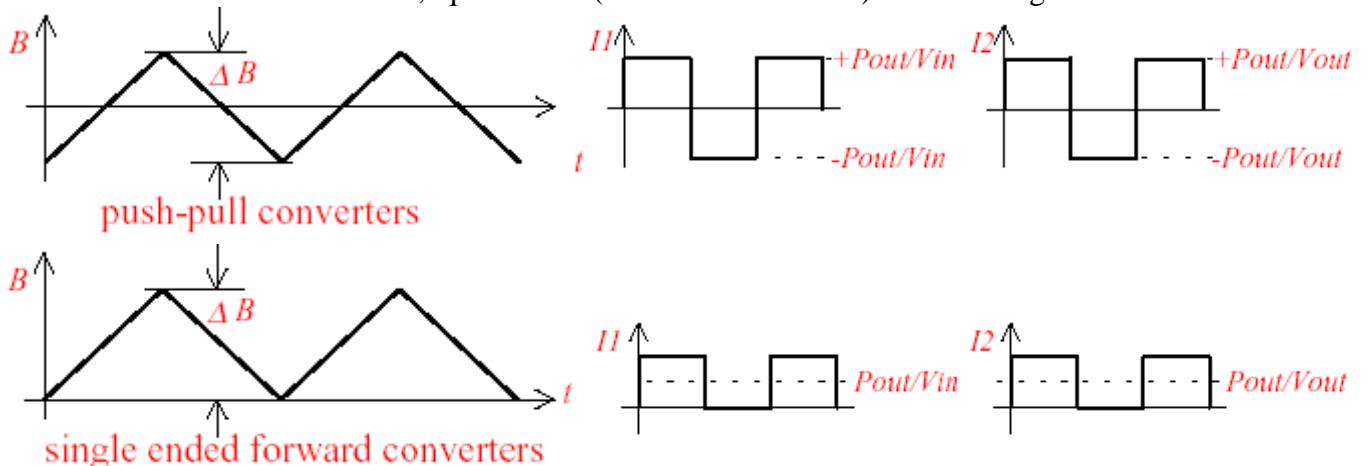


Questa ultima relazione ci permetterà di determinare il numero delle spire del primario N₁ partendo dai dati del nucleo (ΔB [Wb/m²] e A_{fe} [m²]) e dai dati di progetto V₁ [V] e f [Hz].

Generalmente i costruttori di nuclei forniscono dei valori ottimali di ΔB.

Abbiamo finora considerato (e continueremo a farlo) un trasformatore alimentato in Onda Quadra a valor medio nullo ; tale tipologia è definita come “**push-pull**” (vedi grafici qui sotto in alto) con alimentazione generalmente fornita da un ponte full-bridge ; le correnti I₁ e I₂ sono pure a valor medio nullo ed il raddrizzamento della tensione di uscita V₂ è facile anche con esigui filtri dato che la Potenze in gioco sono quasi costanti.

Per convertitori importanti , ad alto rendimento e con medie o alte potenze in gioco e con piccole dimensioni meccaniche relative , questa è la (unica se P > 500W) strada da seguire.



Per convertitori di minore importanza si può adottare una tipologia “single-ended” che ha l’unico vantaggio di adottare una alimentazione da un semplice e più economico half-bridge ; per contro , a parità di condizioni operative e a parità di ΔB (che è sempre un parametro molto limitante) otteniamo un minor sfruttamento del nucleo (si opera in un semipiano unidirezionale) ed a parità di potenza correnti efficaci maggiori di un fattore √2 ; tutti questi fattori ne compromettono pesantemente il rendimento.

Se si vuole ottenere un trasformatore HF ad alto rendimento ed affidabile nel tempo in tutte le condizioni operative bisogna scegliere un nucleo con buone caratteristiche magnetiche e meccaniche. A seconda dell'applicazione si selezionerà prima il materiale più idoneo al specifico scopo.

Materiale →	Co am	Fe am	Ferrite	Nanocristall.
μr operating typ.	2 000 ...	4 000 ...	1 500 ...	20 000 ...
	3 000	8 000	2 500	30 000
P_{Fe, typ.} (f = 20 kHz ; B^ = 200 mT)	2 W/kg	18 W/kg	9 W/kg	1.4 W/kg
P_{Fe, typ.} (f = 100 kHz ; B^ = 200 mT)	40 W/kg	105 W/kg	110 W/kg	35 W/kg
B_{Sat.}	0.8 T	1.55 T	0.48 T	1.2 T
T_{max.}	120 °C	120 °C	100 °C	120 °C

Per applicazioni di bassa potenza con frequenze elevatissime (oltre il MHz) i nuclei in Ferrite sono la soluzione ottimale mentre per medie potenze e frequenze inferiori ai 100KHz sono decisamente preferibili i materiali Nanocristallini per la loro altissima permeabilità , bassissime perdite specifiche , alta Induzione di Saturazione (quindi anche ΔB) ed esteso range di temperatura operativa.

Una volta deciso il materiale bisogna dimensionare il nucleo in funzione della **Potenza Nominale**. Per iniziare bisogna calcolare o ipotizzare (o meglio usare tabelle o metodi forniti dalle case costruttrici di nuclei) , in funzione della **Sovratemperatura** ammissibile , i valori ottimali per Induzione B (densità di Flusso) e densità di Corrente S (Aeff/m²) definiti come **ΔBopt** & **Sopt**

Partendo dalle considerazioni già viste otteniamo :

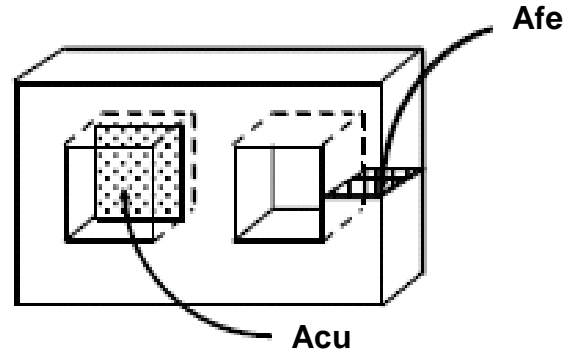
$$V_{eff} \equiv f * \Delta B * A_{fe} \quad I_{eff} \equiv S * A_{cu}$$

e dato che $P = V_{eff} * I_{eff}$, otteniamo :

$$P \equiv f * A_{fe} * A_{cu} * \Delta B_{opt} * S_{opt}$$

Il prodotto $A_{fe} * A_{cu}$ (Area Product [m⁴]) è spesso usato nel dimensionamento pratico del nucleo ed è inoltre proporzionale al volume totale del trasformatore.

Da questa ultima considerazione possiamo dedurre un principio generale che ci indica che a parità di Potenza nominale, le dimensioni geometriche di un trasformatore sono inversamente proporzionali alla Frequenza operativa ed alla massima Induzione ammessa dal materiale magnetico ; la densità di Corrente invece non varia molto ed in assenza di dati utili è stimata nell'intorno dei 3 Aeff/mm² . NB! A_{cu} e la sezione netta del rame moltiplicata per un opportuno coefficiente di riempimento Kr.



In genere il progetto di un buon Trasformatore HF richiede un Processo Iterativo di Ottimizzazione di tutti i parametri ; allo scopo esistono oggi dei tools SW che facilitano questo compito dato che i fattori che intervengono a variare le prestazioni sono molti, non lineari ed a volta contrastanti fra loro.

Dissipazioni per Isteresi : Proporzionali alla Frequenza e dipendono dall'Area del ciclo di isteresi che varia a seconda del materiale magnetico e da circa il Quadrato del ΔBopt adottato.

Dissipazioni per Correnti Parassite : (Eddy Currents) Proporzionali al Quadrato Frequenza e dipendono dalla resistività del materiale e da circa il quadrato del ΔBopt adottato.

Dissipazioni nel Rame : Dipendono da Req * I² , ma alle alte frequenze (f > 10 KHz) il valore di Resistenza Equivalente aumenta per Effetto Pelle (Skin Effect pag.59-60) ; in pratica la densità di corrente non è costante nel conduttore, con un minimo al centro ed un massimo alla periferia. Per frequenze superiori ai 10KHz , per minimizzare l'effetto pelle si adotta in genere filo Litz composto da molti conduttori di piccolissima sezione isolati e trasposti fra loro o rame laminato.

Non Perfetto Accoppiamento fra gli avvolgimenti ,che causa flussi dispersi e quindi induttanze di dispersione che provocano cadute di tensione addizionali proporzionali alla Frequenza.

Progetto di Massima

Definizione della Tipologia del Convertitore Sicuramente di tipo Push-Pull lasciando il tipo Single-Ended solo ed unicamente per convertitori di piccolissima potenza.

Definizione della Frequenza Operativa A volte imposta come parametro di sistema ; in genere decrescente all'aumentare della Potenza ; è pur vero che in linea puramente teorica sarebbe utile operare a frequenze molto elevate ma queste sono in contrasto in primo luogo con Dissipazioni per correnti Parassite seguite da Dissipazioni per Isteresi e Dissipazioni di Commutazione degli Switch adottati (IGBT o MOSFET) che sono proporzionali alla Frequenza.

Scelta del Nucleo Magnetico Rivedere pagina precedente e consultare alcuni cataloghi di case produttrici di nuclei anche per scegliere un tipo meccanicamente adeguato allo scopo.

A questo punto sono definiti solo: **P2 , f , V1 , V2 , f , Afe , Acu , ΔBopt , Sopt**

Calcolo delle Spire Primarie N1 Basta applicare la formula già precedentemente vista

$$N1 = \frac{V1}{\Delta Bopt \cdot 2 \cdot f \cdot Afe} \quad \text{ed ovviamente arrotondare all'intero.}$$

Calcolo delle Spire Secondarie N2 Bisogna ora iniziare a supporre ciò che non conosciamo!

N2 = (N1 / V1) * (V2 + ΔV2) Rispetto ad un trasformatore Ideale avremo delle cadute di tensione ΔV2 dovute alle resistenze degli avvolgimenti R1 & R2 percorse da I1 & I2 e R1 I_M ed alle induttanze di dispersione Ld1 & Ld2 ; se poi si dovesse raddrizzare la tensione V2 avremo anche della cadute di tensione sui diodi. Le variabili ignote sono molte e difficili definire ora ; se non abbiamo una idea del valore di ΔV2 lo potremo porre come un valore compreso fra il 3% ed il 10% di V2.

Calcolo delle Correnti I1 & I2 $I2 = P2 / V2$, $P1 \approx P2 / \eta$, $I1 \approx P1 / V1$

Il calcolo preliminare di I1 dipende dal rendimento previsto η o in mancanza porre $\eta \approx 0,9$

Calcolo delle Sezioni dei Conduttori Dividendo le correnti I1 & I2 (in valore efficace) per la Densità di Corrente ottimale Sopt (Aeff/mm²) otteniamo la Sezione netta di rame dei conduttori per primario e secondario ; se Sopt non è nota si consiglia una densità di corrente di circa 3Aeff/mm².

NB! Se la sezione netta supera 1 mm² (meglio se diametro > 1mm) utilizzare sicuramente filo Litz!

Dopo aver calcolato le sezioni nette di rame Acun1 & Acun2 , consultando un catalogo di un fornitore di conduttori , potremo definire l'ingombro totale di primario e secondario ; tale ingombro dipende da un coefficiente Kr detto di Riempimento che è funzione del tipo di conduttore , del tipo di avvolgimento e della Tensione di Isolamento fra primario e secondario e dei due avvolgimenti rispetto al nucleo che richiede a volte lamine di materiale isolante. Con semplici calcoli geometrici si arriva a determinare la sezione dell'ingombro totale AcuTot e la lunghezza degli avvolgimenti.

A questo punto potremo fare una prima verifica delle nostre scelte e supposizioni.

La sezione AcuTot dovrebbe essere molto simile a quella disponibile Acu del nucleo.

Se le due sezioni fossero molto diverse dovremmo cambiare tipo di nucleo e rifare tutti i conti.

Se il rapporto Kcu = Acu / AcuTot fosse compreso fra 0,8 ed 1,2 potremmo correggere il numero delle spire od alterare la densità di corrente variando la sezione netta dei conduttori.

Variazione di N1 & N2 : $N1 = N1 * Kcu$ & $N2 = N2 * Kcu$

!!! Una diminuzione di N comporta un aumento di ΔB e quindi maggiori dissipazioni nel nucleo ma una diminuzione della lunghezza e R degli avvolgimenti con diminuzione delle dissipazioni nel rame.

Variazione di Acun1 & Acun2 : $Acun1 = Acun1 * Kcu$ & $Acun2 = Acun2 * Kcu$

!!! Una diminuzione di Acun produce una maggior densità di corrente con forte aumento delle dissipazioni nel rame ; le dissipazioni nel nucleo restano praticamente inalterate.

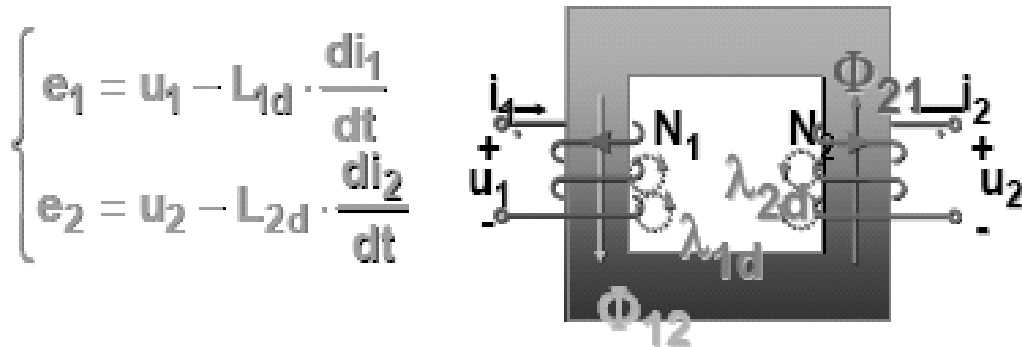
La miglior soluzione consiste in una correzione pesata sia del numero delle spire che delle densità di corrente ; alla fine bisognerà verificare che le dissipazioni totali non siano eccessive (Kcu < 1).

Per quanto finora visto si evince che è meglio prepararsi un foglio di calcolo per rendere più veloce e privo di errori il processo iterativo di ottimizzazione

In un Trasformatore Reale **non** tutto il flusso è **perfettamente concatenato** con primario e secondario. I flussi che si concatenano **solamente** con primario e secondario sono i **Flussi Dispersi** e provocano **cadute di tensione** proporzionali alle relative variazioni nel tempo delle correnti ; questo fatto spiega il perché nel circuito equivalente compaiono le **Induttanze di Dispersione** L_{1d} & L_{2d} .
Con avvolgimenti ben disposti queste **induttanze di dispersione** sono **molto minori della** L_M dato che questa rappresenta il flusso utile e cioè quello concatenato con entrambe gli avvolgimenti.

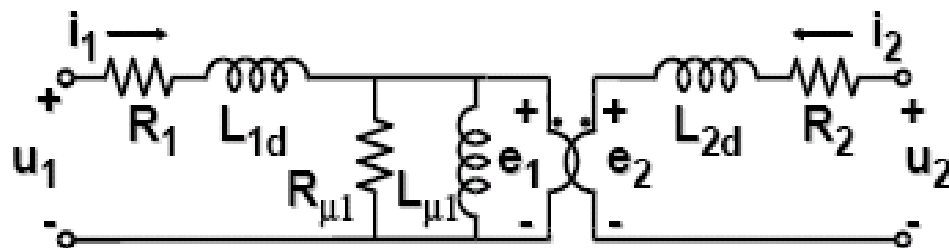
$$u_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d\lambda_{1d}}{dt} + \frac{d\lambda_{12}}{dt} = L_{1d} \cdot \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\Phi}{dt}$$

$$u_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d\lambda_{2d}}{dt} + \frac{d\lambda_{21}}{dt} = L_{2d} \cdot \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$



$$\begin{cases} e_1 = u_1 - L_{1d} \cdot \frac{di_1}{dt} \\ e_2 = u_2 - L_{2d} \cdot \frac{di_2}{dt} \end{cases}$$

Fatte queste premesse ci ritroviamo il Classico Circuito Equivalente Completo del Trasformatore Reale dove compaiono anche le resistenze primarie e secondarie R_1 & R_2 che percorse dalle correnti I_1 & I_2 generano delle **cadute di tensione resistive** (in fase con le relative correnti) che in un trasformatore ben progettato dovrebbero essere **molto piccole rispetto alle tensioni principali**.
Conoscendo la sezione dei conduttori e la loro lunghezza è facile calcolarne il valore ad una certa temperatura (vedi pag. 58) o misurarla sperimentalmente con metodo voltamperometrico.
Nel caso di trasformatori HF tale valore è **maggiore** di quello DC per la presenza dell' **effetto pelle** !



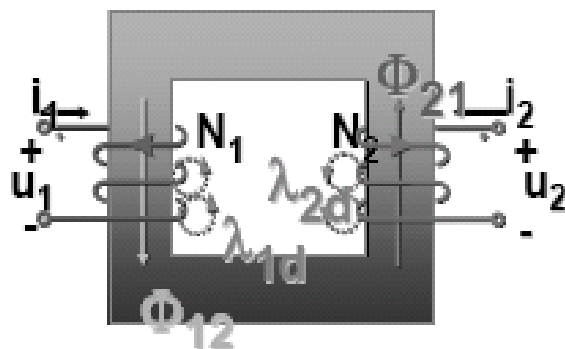
Nel circuito equivalente compare anche la resistenza $R_{\mu 1}$ che tiene conto di tutte le dissipazioni presenti nel **nucleo** per isteresi e per correnti parassite (circa proporzionali a V^2).

Un **metodo empirico** (ma spesso adottato) per verificare il prototipo sperimentale di un trasformatore progettato con la procedura di massima già vista, consiste nell'alimentare il trasformatore in **condizioni nominali** su un carico resistivo e misurare la **sovratemperatura di regime** degli **avvolgimenti in rame e del nucleo** e (se necessario) da queste dedurre eventuali modifiche sulla sezione dei conduttori o sulla scelta del nucleo od una media pesata di questi accorgimenti.

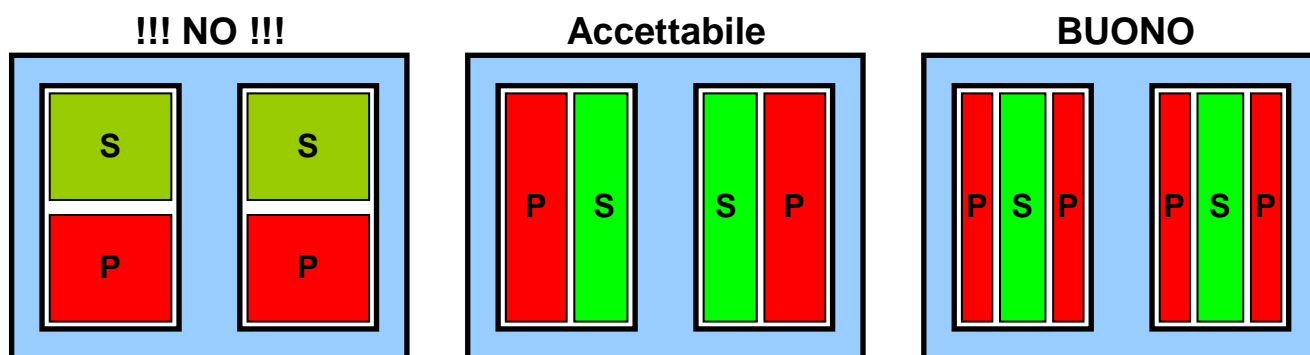
Leonardo da Vinci soleva dire : **“ Nulla da di se certezza senza esperienza ”**

Per minimizzare i flussi dispersi e di conseguenza le cadute di tensione induttive che in genere crescono linearmente con la frequenza, esistono moltissimi accorgimenti che devono essere adottati nello studio della disposizione dei conduttori all'interno della finestra del nucleo dedicata al rame.

Di questi accorgimenti ne esistono molti e quindi ci limiteremo a dare solo pochi e chiari consigli pratici utili per un primo prototipo, lasciando lo studio di tecniche più sofisticate in una ultima fase di ottimizzazione di un prodotto.

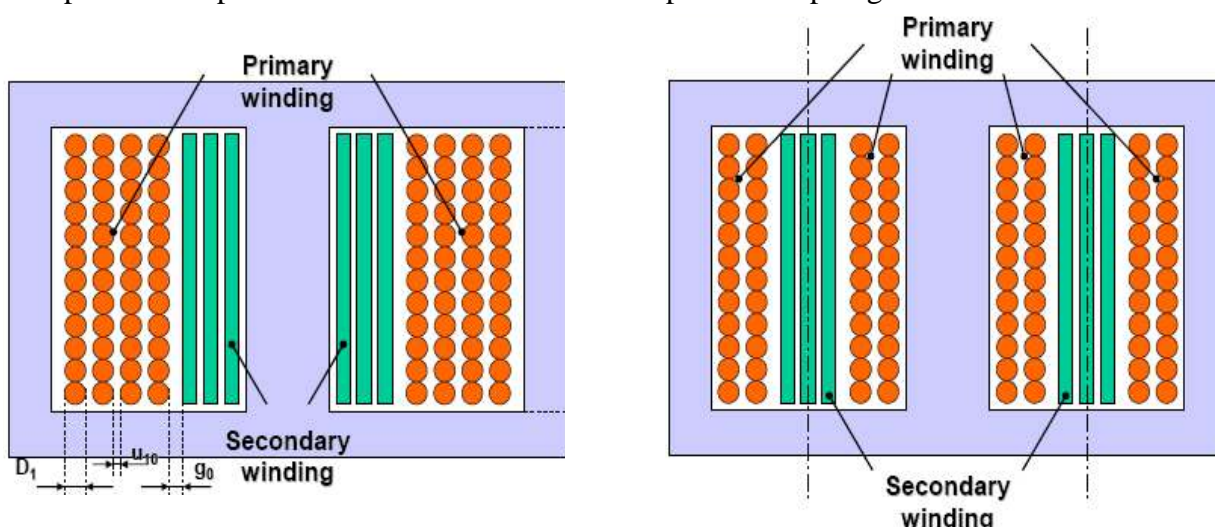


Un tipo di avvolgimento con Primario P e Secondario S separati (come il primo esempio a sinistra) è sicuramente **inaccettabile** per una fortissima presenza di flussi dispersi.



Si può ottenere un miglior accoppiamento avvolgendo internamente il secondario ed esternamente il primario (come l'esempio centrale); in questo caso (**SIMPLE WINDING**) si hanno flussi dispersi solo di estremità.

Si può migliorare di molto l'accoppiamento avvolgendo il Secondario in mezzo al Primario diviso in due parti (come nell'esempio a destra); con questa tipologia (**INTERLEAVED WINDING**) si hanno flussi dispersi molto piccoli e **circa 4 volte minori** rispetto alla tipologia SIMPLE.

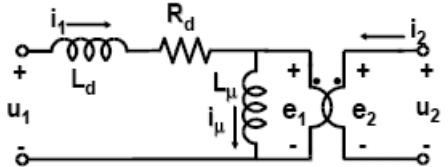


Esistono molti altri metodi più complessi di Multiple Interleaved Winding con ottimo accoppiamento ma in genere sono difficili da realizzare specie se sono richieste alte tensioni di isolamento; tutto questo può essere calcolato, ma questo esula da questa trattazione elementare.

Una regola empirica per Minimizzare i Flussi Dispersi è quella di fare in modo di Massimizzare la Superficie in Comune fra Primario e Secondario.

Per uno studio dinamico (approssimato) del trasformatore conviene riportare i parametri al primario in modo da poter facilmente dedurre una funzione di trasferimento in "s" e quindi ricavare un grafico indicativo della risposta in frequenza.

Schema semplificato del trasformatore reale

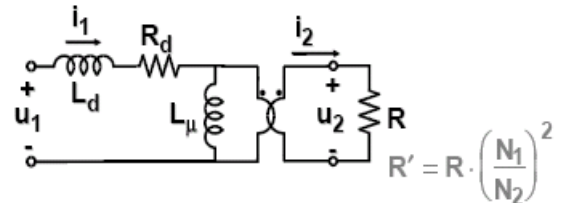


Ipotesi semplificative:

- piccole cadute di tensione: $u_1 \cong e_1$ $u_2 \cong e_2$
- perdite nel nucleo trascurabili: $R_{\mu 1} = \infty$

$$L_d = L_{1d} + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 L_{2d} \quad R_d = R_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R_2$$

Risposta in frequenza del trasformatore



Ipotesi: $L_{\mu} \gg L_d$ $R_d \ll R'$

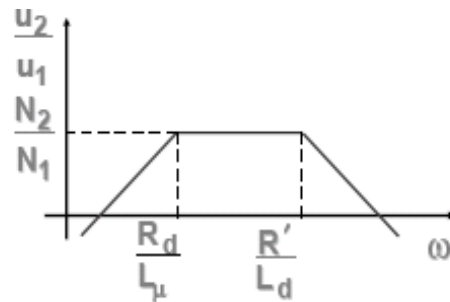
Si trova:
$$\frac{u_2(s)}{u_1(s)} = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{s \cdot \frac{L_{\mu}}{R_d}}{\left(1 + s \cdot \frac{L_{\mu}}{R_d}\right) \cdot \left(1 + s \cdot \frac{L_d}{R'}\right)}$$

Alla fine di questa breve trattazione si deduce che la risposta in frequenza è di tipo **Passa Banda** del primo ordine dove le pendenze iniziali e finali sono di +/- 20 dB/Decade.

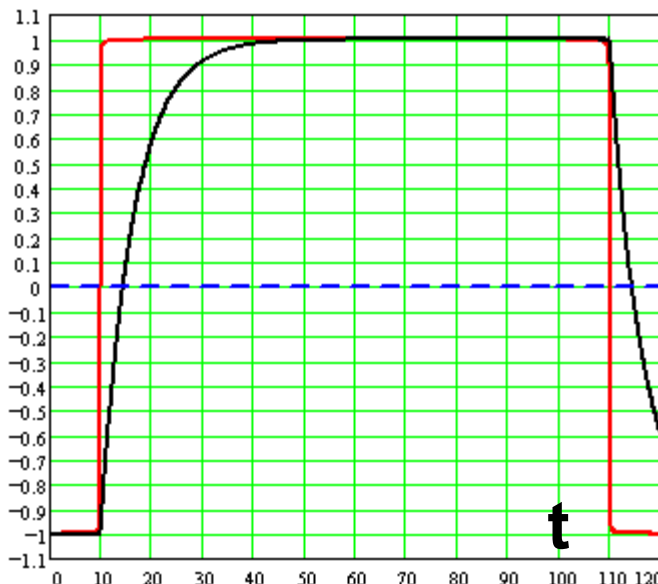
La **Frequenza Minima** f_{min} è in genere bassa dato che R_d è molto piccola mentre L_M è abbastanza consistente.

La **Frequenza Massima** dipende dal carico e tende all'infinito (in teoria) solo a vuoto ; comunque anche a carico nominale , in un trasformatore accuratamente progettato , la banda passante è sufficientemente ampia dato che L_d è in genere molto piccola.

Teniamo a precisare che una ampia banda passante non è prerogativa essenziale per trasformatori audio o trasformatori di segnali ad alta frequenza ; anche per convertitori di potenza HF alimentati in onda quadra , una buona banda passante è auspicabile per poter comprendere anche le armoniche di ordine superiore che , insieme alla fondamentale , contribuiscono al trasferimento di energia.



- f_{min} è una caratteristica del trasformatore
- f_{max} dipende dal carico (a vuoto $f_{max} = \infty$)
- A bassa frequenza il trasformatore si comporta come un corto circuito ($R_{cc} = R_d$)

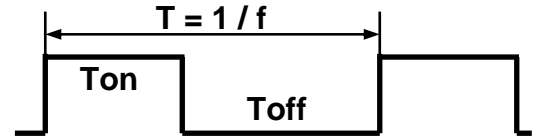


La banda passante di un trasformatore HF può essere anche verificata sperimentalmente alimentando il primario con onda quadra di ampiezza e frequenza nominali ; a vuoto si avrà in uscita una onda quadra molto simile a quella teorica ma aumentando il carico lo stondamento dei fronti ci può dare un'idea di quanto vengono attenuate le armoniche di ordine superiore.

Misurando la costante di tempo **T** della salita della onda di uscita possiamo ottenere il valore della frequenza massima: **$f_{max} = 1 / (2 \pi T)$**
NB! In realtà esistono anche delle capacità parassite , ma di queste se ne tiene conto solo in convertitori di estrema importanza.

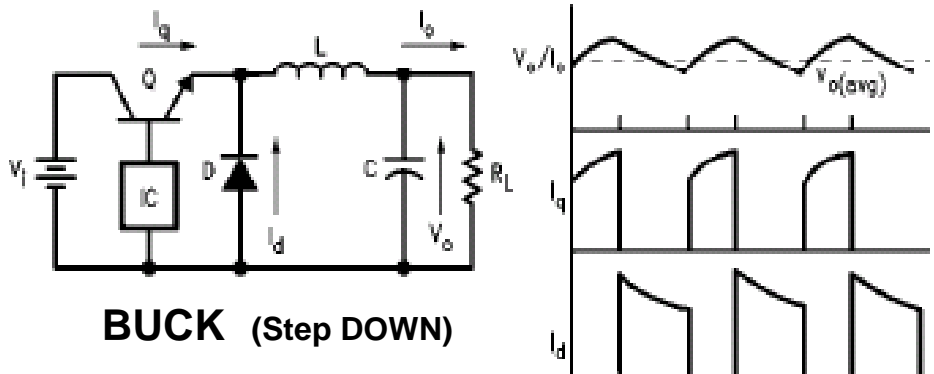
Se per variare **Vin / Vout** non è necessario un Isolamento Galvanico fra ingresso e uscita si può fare a meno del trasformatore ed utilizzare un semplice **INDUTTORE** in una delle molte configurazioni e , modulando opportunamente il Duty-cycle **D** di uno o più switch fra 0 ed 1.

D = Ton / T dove **T = Ton + Toff = 1 / f**
Ton = T * D **Toff = T * (1 - D)**



La più semplice tipologia è quella del **Chopper Abbassare** detto anche **BUCK o Step DOWN**.

Durante il Ton , Q impone una alta tensione all'induttore che si carica provocando una salita di corrente ; durante il Toff la IL circola nel diodo D imponendo una tensione quasi nulla a L provocando una diminuzione della IL ; il tutto si ripete ciclicamente provocando una condizione media :

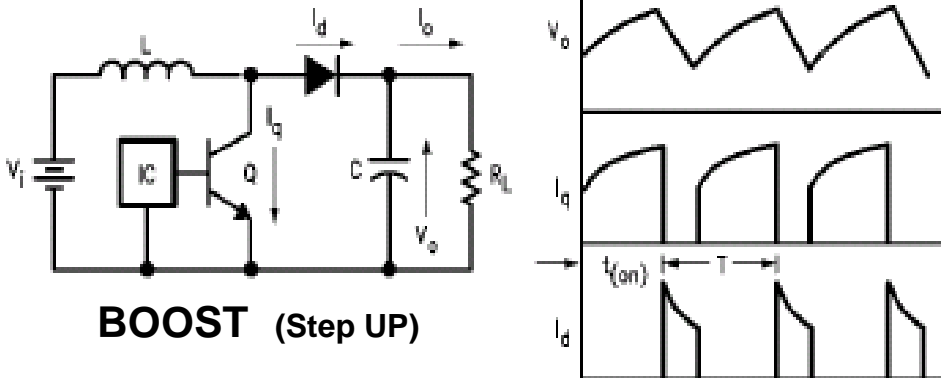


BUCK (Step DOWN)

Vout = Vin * D e **Iin = Iout * D** ; questo trascurando le perdite porta a **Pin = Pout**

Una altra semplice tipologia è quella del **Chopper Innalzatore** detto anche **BOOST o Step UP**.

Durante il Ton , Q impone una alta tensione all'induttore che si carica provocando una salita di corrente ; durante il Toff la IL circola nel diodo D imponendo una tensione negativa a L provocando una diminuzione della IL ; il tutto si ripete ciclicamente provocando una condizione media :



BOOST (Step UP)

Vout = Vin / (1 - D) e **Iin = Iout / (1 - D)** ; questo, trascurando le perdite porta a **Pin = Pout**

Appare ovvio che il Ripple di uscita dipende da **L & C** ed è inversamente proporzionale ad **f** .

Anche in questo caso il progetto di massima segue le stesse regole già viste per il trasformatore solo che qui dobbiamo considerare che si opera con Duty-cycle variabile e bisogna definire anche **C** .

Per convertitori di notevole importanza si effettuano tutti i calcoli dinamici del caso e si considerano tutte le dissipazioni (ferro , rame , conduzione , commutazione) e si procede in modo iterativo sino ad ottenere i risultati voluti ; per piccoli convertitori si possono seguire i suggerimenti dei costruttori di IC dedicati al controllo dei convertitori ed in funzione delle prestazioni volute si ottengono tutti i dati.

Per piccoli BUCK esiste un metodo empirico abbastanza efficace che consiste nel definire il ripple di corrente nell'induttore ΔI_L ed il ripple di uscita ΔV_C e calcolare $KV = (V_{in} - V_{out}) * V_{out} / V_{in}$ per ottenere $L = KV / (\Delta I_L * f)$ e quindi $C = KV / (8 * \Delta V_C * L * f^2)$; ad esempio , volendo $V_{out} = 12V$ con $I_{out} = 1 A$ e $\Delta V_C = 18,75mV_{pp}$ e $\Delta I_L = 300mA$ partendo da $V_{in} = 24V$ otteniamo: $KV = 6V$ e quindi $L = 1 mH$ e $C = 100\mu F$.

Ricordiamo che un **Trasformatore Trasferisce Energia** mentre un **Induttore Accumula Energia**, è quindi consigliabile un **Nucleo con minimo Traferro** , specie per alte potenze.

In genere il progetto di un induttore è più semplice di quello di un trasformatore , bisogna però sempre utilizzare una certa maestria nel capire ed eventualmente correggere i parametri operativi.

La scelta del **nucleo** è importante per poter avere una alta permeabilità relativa che nel caso dell'induttore ci farà ottenere una certa induttanza con un basso numero di spire.

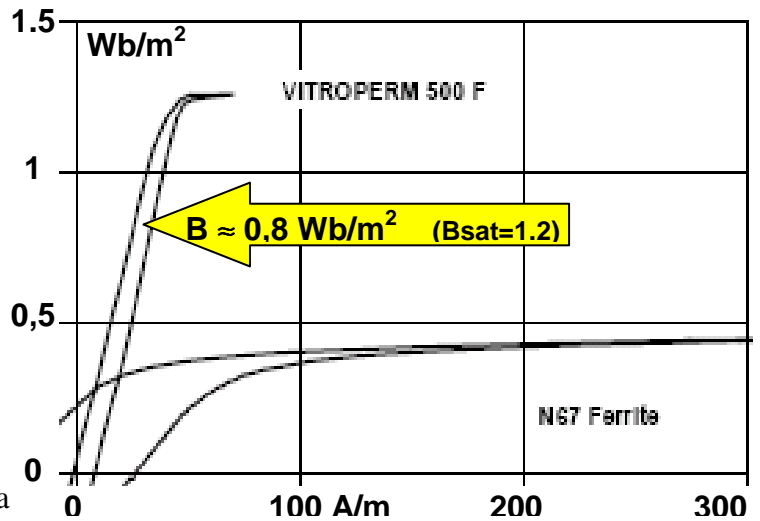
Riveste anche una grande importanza la area del ciclo di isteresi che è proporzionale (a parità di frequenza operativa) alle perdite nel ferro specifiche al volume.

In attuali applicazioni di media potenza e con frequenze operative inferiori ai 100KHz un nucleo in materiale **nanocristallino** è certamente da preferire.

La corrente in un induttore di **chopper** ha in genere una componente continua abbastanza alta con sovrapposto un ripple ad alta frequenza (es. 20 KHz) ma con ampiezza decisamente piccola.

I **cicli di steresi** ad alta frequenza avverranno nella zona di lavoro scelta (circa 2/3 dei Bsat) con **area piccola** , in conseguenza di ciò le **dissipazioni nel ferro saranno molto contenute**.

Per un veloce calcolo di massima , **data la L voluta , calcoliamo tutto in assenza di traferro.**



1) Permeanza → $\Lambda_{fe} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{A_{fe}}{l_{fe}}$

2) Riluttanza → $\mathfrak{R}_{fe} = \frac{1}{\Lambda_{fe}}$

3) Flusso → $\Phi = B \cdot A$

4) Forza m.m. → $M = \mathfrak{R}_{fe} \cdot \Phi$

5) N spire → $N = \sqrt{\frac{L}{\Lambda_{fe}}}$

6) Corrente → $I = \frac{M}{N}$

Ok abbiamo ottenuto una induttanza L con N spire e che con la corrente I ci dia la B operativa.

A questo punto , data la altissima permeanza del nucleo , la corrente I sarà molto piccola.

Per poter operare con una corrente molto più alta (! ma a parità di L e B) introduciamo un piccolo traferro ; calcoliamo quindi una distanza in aria tale che abbia la stessa permeanza del ferro già calcolata.

Dato che il flusso dovrà essere identico a quello già calcolato per il ferro ma avrà una sezione

leggermente maggiore A_{feT} e permeabilità μ_0 otteniamo : $Traf1 = \frac{l_{fe}}{\mu_r} \cdot \frac{A_{feT}}{A_{fe}}$

Questa distanza in aria è quella che avrà la stessa permeanza e riluttanza del circuito in ferro ; essendo le due riluttanze in serie otteniamo che $\mathfrak{R}_t = \mathfrak{R}_{fe} + \mathfrak{R}_a$; nel caso che il traferro $Traf = Traf1$, otterremo un raddoppio di \mathfrak{R} ed un dimezzamento di Λ ; volendo mantenere lo stesso flusso dovremo raddoppiare M e per mantenere la stessa L dovremo moltiplicare N per $\sqrt{2}$.

Venendo al caso generico utilizzando un traferro in aria **Traf = Traf1 * (K-1)** otterremo per **K > 1** :

Un aumento proporzionale a \sqrt{K} per : N I Sect

Un aumento proporzionale a K per : M En Awin

!!! Resteranno costanti : B Φ L

Nella pagina successiva viene dato un esempio con foglio di calcolo CalcInd0 della procedura seguita che personalmente ritengo il metodo più semplice di dimensionamento ; vengono inoltre calcolate altre grandezze ausiliarie come verifica procedurale.

Questa procedura utilizza, come esempio, un nucleo toroidale VAC T60004-L2080-W436 di materiale nanocristallino VITROPERM 500 F che può gestire un'induttanza $L = 2$ mH con correnti sino all'ordine di circa 35A ed energia di circa 1,225 J con minime perdite.

Per calcolare il tutto basta introdurre i dati nelle caselle evidenziate in giallo.

Calcolo Induttanza L [mH] partendo da dati nucleo SENZA TRAFERRO

AfeT [mm ²]	Afe [mm ²]	lfe [mm]	mfe [Kg]	B [Wb/m ²]	μr	μ0 [H/m]	μ [H/m]
212	162	225	0,287	0,8	20000	1,2566E-06	2,513E-02
L [mH]	Δfe [H]	ℳfe [1/H]	Φ [Wb]	M [Asp]	H [A/m]	N [spire]	I [A]
2	1,810E-05	5,526E+04	1,296E-04	7,162	31,831	10,513	0,68125
S [A/mm ²]	Acu [mm ²]	lcu [mm]	Krcu	Acun [mm ²]	Use%	Awin [mm ²]	Sect [mm ²]
3	10400	126	0,7	7280,0	0,03	2,387	0,227
Verify >>	En [mJ]	½BHV [mJ]	B / H	File: CalcInd0.XLS			
	0,464	0,464	2,513E-02				

A parità di induzione B nel ferro e volendo conservare lo stesso valore di L

Traferro per ottenere la stessa Permeanza = 0,0147222 [mm]

Volendo	I [A] = 10	>>>>>>>>	K	Traf [mm]	√K		
			215,47275	3,157515	14,679		
ℳfe [1/H]	ℳa [1/H]	ℳt [1/H]	Δt [H]	N [spire]	I [A]	M [Asp]	En [mJ]
5,526E+04	1,185E+07	1,191E+07	8,398E-08	154,321	10,000	1543,210	100,000
Verify >>	L [mH]	B [Wb/m ²]	Acun [mm ²]	Use%	Awin [mm ²]	Sect [mm ²]	
	2,000000	0,800000	7280,0	7,07	514,403	3,333	

Calcolo INDUTTORE REALE

				Traf [mm]	N [spire]	I [A]		
				3,15	154	10		
ℳt [1/H]	Δt [H]	M [Asp]	Φ [Wb]	B [Wb/m ²]	ErrB%	L [mH]	ErrL%	
1,188E+07	8,418E-08	1540,000	1,296E-04	0,800	0,0290	1,996	-0,1791	

Introducendo un traferro di 3,15 mm si ottiene una corretta gestione di una corrente da 10 A. Aumentando ulteriormente il traferro a 12,69 mm si arriva anche a 20 A ...

Volendo	I [A] = 20	>>>>>>>>	K	Traf [mm]	√K		
			861,89099	12,674228	29,358		
ℳfe [1/H]	ℳa [1/H]	ℳt [1/H]	Δt [H]	N [spire]	I [A]	M [Asp]	En [mJ]
5,526E+04	4,757E+07	4,763E+07	2,100E-08	308,642	20,000	6172,840	400,000
Verify >>	L [mH]	B [Wb/m ²]	Acun [mm ²]	Use%	Awin [mm ²]	Sect [mm ²]	
	2,000000	0,800000	7280,0	28,26	2057,613	6,667	

Calcolo INDUTTORE REALE

				Traf [mm]	N [spire]	I [A]		
				12,69	309	20		
ℳt [1/H]	Δt [H]	M [Asp]	Φ [Wb]	B [Wb/m ²]	ErrB%	L [mH]	ErrL%	
4,769E+07	2,097E-08	6180,000	1,296E-04	0,800	-0,0083	2,002	0,1077	

Notare come nella ultima parte del foglio ci sia una verifica del calcolo con dati reali.

Gli avvolgimenti di un induttore sono generalmente più semplici da realizzare rispetto a quelli di un trasformatore; valgono comunque le stesse avvertenze.

Ripple di I_L & V_C

Consideriamo un **Chopper Abbassatore** (come visto a pag. 13) ma utilizziamo un secondo switch al posto del diodo collegato a GND (in pratica una gamba di inverter) in modo da ottenere in uscita una generica tensione positiva $V_{out} = V_{in} \cdot D$ compresa fra **0** e **+Vin**.

Per semplicità supponiamo **C molto grande** in modo che **Vout sia praticamente costante** e che la resistenza interna R_i dell'induttanza sia molto piccola in modo che la $\tau = L / R_i$ sia **molto grande rispetto al periodo di commutazione $T = 1 / f$** ; le variazioni della I_L saranno , con ottima approssimazione , lineari.

Dato che: $V_L = V_{in} - V_{out} = V_{in} (1 - D)$

e che: $T_{on} = \Delta t = T \cdot D$

considerando la $\Delta I = V_L / L \cdot \Delta t$

otteniamo: $\Delta I = V_{in} (D - D^2) \cdot T / L$

Il termine $(D - D^2)$ ci dice che il ripple di corrente nella induttanza , e cioè il suo valore Picco-Picco varia in funzione di D secondo una legge quadratica ed assume il valore massimo di $1/4$ per $D=0,5$. Nel grafico a lato , tale termine è stato normalizzato ad 1 moltiplicandolo per 4. Per determinare quindi il valore della L conviene considerare il worst-case di ripple che si ha con $D = 0,5$; quindi : $\Delta I = V_{in} / 4 \cdot T / L$, da cui :

$$L_{min} = V_{in} / (4 f \Delta I_{max})$$

Es. Dati $V_{in} = 400V$, $f = 20KHz$, e $\Delta I = 1 \text{ App}$, otteniamo $L_{min} = 5 \text{ mH}$

A questo punto , in funzione del ripple voluto sulla V_{out} , che coincide con la V_C , dobbiamo determinare C.

Dato che la V_C è l'integrale della corrente che passa nel condensatore, dalle rampe lineari della I_L otterremo degli archi di parabola che costituiranno il ripple della V_C .

Questo fatto lo si ritrova nello sviluppo di Fourier della Triangolare rispetto alla Parabolica ; la prima ha ampiezze Armoniche Inv. prop. a N^2 mentre la seconda a N^3 .

Per calcolare il valore picco-picco di ΔV_C consideriamo l'area del triangolo con base $T/2$ ed altezza $\Delta I / 2$,

ottenendo $\Delta V_C = \Delta I T / 8 C = V_{in} (D - D^2) T^2 / (8 L C)$

Considerando il worst-case con $D = 0,5$ otteniamo:

$\Delta V_C = V_{in} T^2 / (32 L C)$, da cui :

$$C_{min} = V_{in} / (32 f^2 L \Delta V_{C_{max}})$$

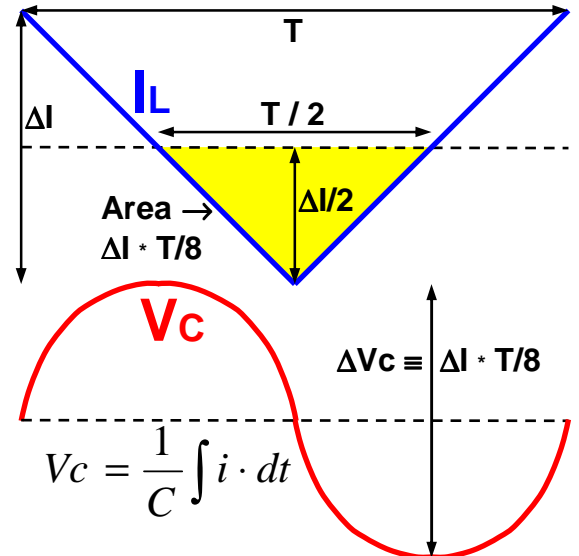
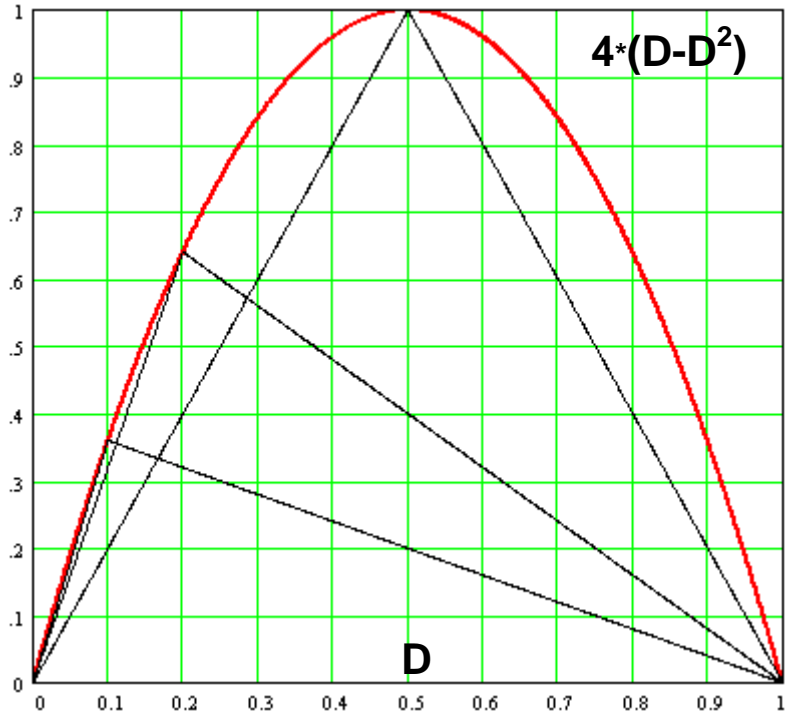
Es. Dati $V_{in} = 400V$, $f = 20KHz$, $L = 5mH$, $\Delta V_C = 0,125 \text{ Vpp}$, otteniamo $C_{min} = 50 \text{ uF}$

La trattazione non cambierebbe se si cortocircuitasse l'uscita o la si facesse agire su di un circuito di impedenza molto piccola ; in pratica avremmo realizzato un generatore di corrente (invece che un generatore di tensione) in grado di iniettare una certa corrente dipendente da D e dal valore di Z_{ext} , che in questo caso sarebbe auspicabile non piccolissima.

Per i generatori di tensione sono importanti L & C mentre per i generatori di corrente il valore di L è decisamente preponderante.

Questa trattazione semplificata in pratica viene considerata esatta e quindi utilizzata nelle applicazioni pratiche se le costanti di tempo \sqrt{LC} o L/R sono almeno 5 volte maggiori del periodo operativo T.

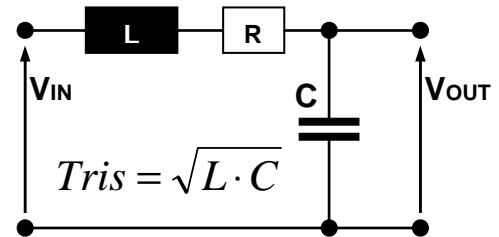
NB! In questa trattazione di dimensionamento si ignora I_{out} , considerata una invariante di sistema.



Prima di procedere ulteriormente , dobbiamo richiamare alcuni concetti di base inerenti a circuiti reattivi che comprendano sia induttori che condensatori.

Il più semplice e più usato è lo LPF del 2° ordine illustrato qui a lato.

In genere R è costituita dalla resistenza interna della induttanza. Lo studio dinamico (a vuoto) è molto semplice mentre bisogna caso per caso studiare il comportamento dinamico a carico.



La F.D.T è : $V_{OUT} = V_{IN} \cdot \frac{1}{1 + s \cdot 2 \cdot \xi \cdot Tris + s^2 \cdot Tris^2}$ dove $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{2Q}$ e $f_{ris} = \frac{1}{2\pi \cdot Tris}$

Le 2 costanti di tempo dell'equazione caratteristica sono: $T_{1,2} = \frac{Tris}{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}$

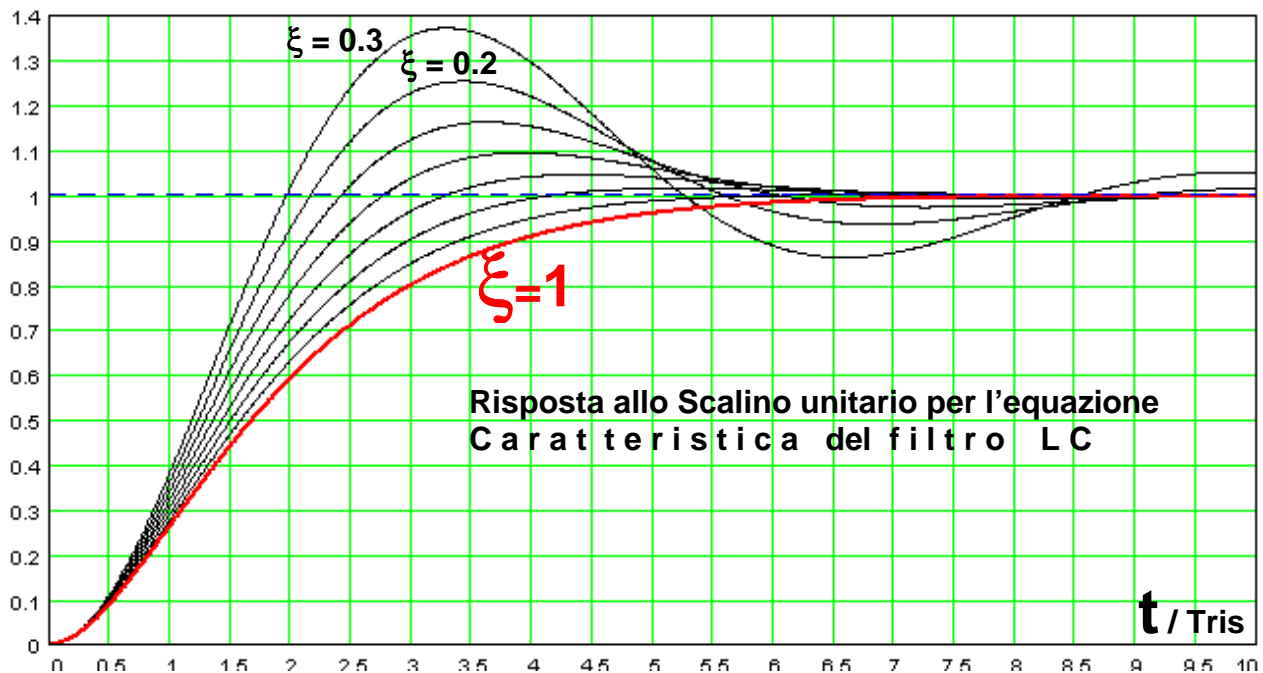
I transitori sono quindi condizionati dallo smorzamento ξ (o dal fattore di merito Q) :

Per $\xi > 1$ si ha un andamento **sovrasmorzato** con due costanti di tempo puramente reali

Per $\xi = 1$ si ha lo **smorzamento critico** con due costanti di tempo identiche $T1 = T2 = Tris$

Per $\xi < 1$ si ha un andamento **sottosmorzato** con due costanti di tempo complesse coniugate

Per $\xi < 0$ il sistema diventa **assolutamente instabile** e bisogna provvedere a stabilizzazione.



Detto ciò dobbiamo considerare due casi.

1) Volendo ottenere una **Tensione Continua Stabilizzata e Costante** dovremo utilizzare una **C di uscita di capacità molto elevata** per ottenere basso ripple ed un alto smorzamento.

2) Se invece vogliamo far **Variare la Tensione**, ad esempio con andamento sinusoidale a **50Hz** (vedi pag. successiva) dovremo utilizzare un rapporto **C / L non molto grande** e verificare , in funzione di Ri , lo smorzamento e fare in modo che la **Frequenza di Risonanza** non cada in zone pericolose. In questo caso bisognerà fare uno studio approfondito della dinamica del filtro in presenza di una certa impedenza di carico ; se il carico è di tipo **Passivo** ed ha una resistenza differenziale $R\Delta = \Delta V / \Delta I$ positiva avremo un benefico aumento dello smorzamento ; per un carico a **Corrente Costante** la $R\Delta$ tende a + infinito ed il filtro si comporta circa come a vuoto ; in un carico a **Potenza Costante** un aumento di V produce una diminuzione di I provocando una $R\Delta = - P/I^2$ negativa che può anche Destabilizzare il Sistema (!!! Esistono però varie soluzioni del problema).

Full Bridge I N V

Utilizzando 2 chopper abbassatori otteniamo un **Full Bridge INVERTER**

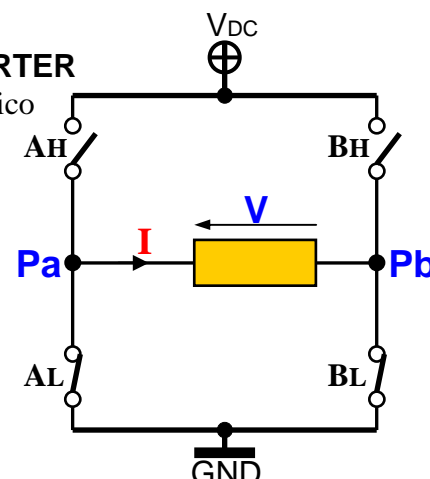
Questa configurazione con 4 switch permette di fornire ad un certo carico monofase una tensione alternata con forma d'onda qualsiasi.

I due switch High & Low formano una "gamba" di inverter; i due switch saranno ON (chiuso) solo se l'altro sarà OFF (aperto); per evitare che durante le transizioni siano entrambe ON (cross conduction) prima di mettere in ON uno switch si mette in OFF lo switch complementare e solo dopo un certo "Dead-Time" si effettua la commutazione di ON voluta.

Fatta questa premessa, per ogni gamba definiremo il livello 0 come Low=ON & High=OFF ed livello 1 come High=ON & Low=Off. Come è possibile vedere dalla tabella, otteniamo 4 Stati

Di questi 4 Stati solo gli stati 1 & 2 sono stati Attivi e forniscono tensione al carico, gli stati 0 & 3 sono stati Neutri equivalenti e forniscono tensione nulla al carico cortocircuitandolo.

Supponiamo ora di fissare il livello di B = 0 e di modulare in PWM il livello di A fra 0 e 1 per ottenere gli Stati 0 & 1.



Stato	A	B	Pa	Pb	V
0	0	0	0	0	0
1	1	0	+V _{DC}	0	+V _{DC}
2	0	1	0	+V _{DC}	-V _{DC}
3	1	1	+V _{DC}	+V _{DC}	0

Sotto questa ipotesi potremo avere in funzione di D una tensione $V = D V_{DC}$ e cioè una tensione positiva qualsiasi compresa fra 0 e +V_{DC}; facendo l'opposto (A=0 modulando B, Stati 0 & 2) otterremo una tensione negativa qualsiasi compresa fra 0 e -V_{DC}.

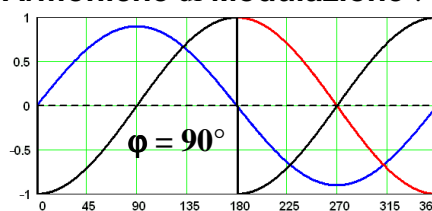
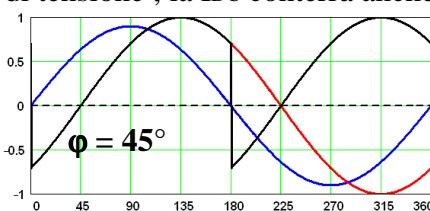
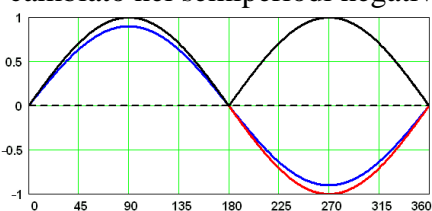
Come esempio proponiamoci di ottenere una tensione alternata sinusoidale **230 Veff a 50 Hz**:

Dovremo adottare PWM ad una frequenza molto più alta del 50Hz, ad esempio **20 KHz** dove **T=50us** e far variare **D = Ton / T** fra 0 e 1 secondo un Riferimento Sinusoidale; dato che il valore massimo della sinusoide è $\sqrt{2}$ volte maggiore del valore efficace, dovremo avere una V_{DC} di +325,27 V ma, per garantirci un certo margine (+23%), adotteremo **V_{DC} = +400 V**.

Nei semiperiodi positivi porremo B=0 modulando A mentre in quelli negativi A=0 modulando B.

Potremo variare sia la Frequenza (ed anche la Fase) sia l'Ampiezza della nostra Sinusoide.

La corrente I circolante carico dipenderà dall'Impedenza Z del carico e ce la ritroveremo sul bus V_{DC} come I_{dc} con lo stesso modulo ma con segno uguale nei semiperiodi positivi di tensione e con segno cambiato nei semiperiodi negativi di tensione; la I_{dc} conterrà anche **Armoniche di Modulazione!**



In questi grafici si nota come al variare del ritardo della corrente (rossa) sulla tensione (blu) la I_{dc} cambi il proprio segno ai cambi di polarità di tensione e come il suo valore medio sia 0 per $\phi = 90^\circ$.

Questo ultimo fatto è facilmente spiegabile se consideriamo che il prodotto **V_{dc} * I_{dc}** è la **Potenza Attiva** del carico (se prescindiamo dalle perdite dell'inverter, in genere percentualmente piccole).

Il carico può essere di qualsiasi tipo, sia passivo (utilizzatore) che attivo (generatore); ad esempio in applicazioni Eoliche o PV si usa un inverter monofase per iniettare la corrente voluta sulla rete (grid) monofase.

Nel caso monofase una rappresentazione **vettoriale** è molto semplice dato che abbiamo a che fare solo con una tensione ed una corrente; avremo quindi due soli vettori con il loro modulo e fase la loro fase; potremo studiarli in un **frame fisso** (i vettori ruotano alla loro frequenza) od in un **frame rotante** alla stessa frequenza dei vettori per vedere i vettori fermi in una certa posizione.

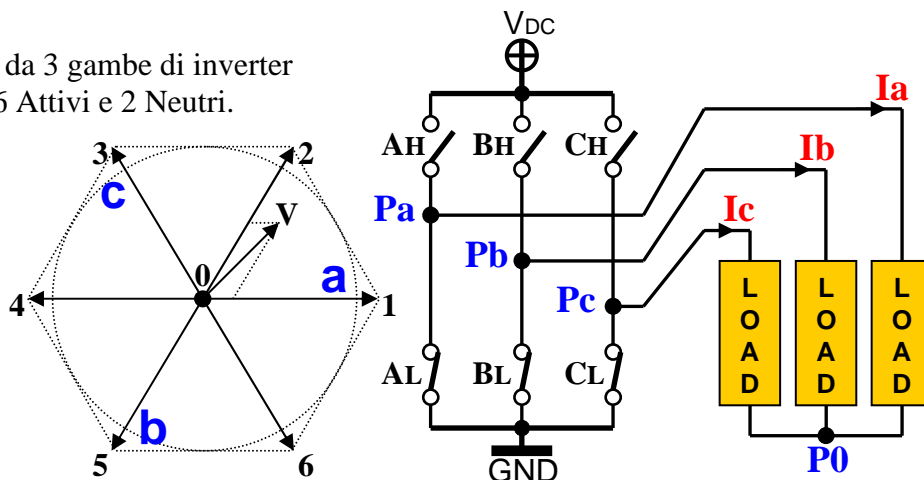
La modulazione potrà essere **PWM (Pulse Width Mod)** o **PFM (Pulse Frequency Mod)** o per frequenze molto alte anche di tipo **PSM (Phase Shift Mod)** come illustrato a pag. 49.

In ogni caso dovranno essere rispettate le normative vigenti per i disturbi condotti o irradiati (problematiche **EMI - EMC**) adottando opportuni filtri (in genere **LC**).

3 Phase I N V

Un inverter Trifase è costituito da 3 gambe di inverter ed ha quindi 8 Stati possibili , 6 Attivi e 2 Neutri.

Vector	State	Single
0	000	1 / 3 / 5
1	001	0 / 2 / 6
2	101	7 / 1 / 3
3	100	0 / 2 / 4
4	110	7 / 3 / 5
5	010	0 / 4 / 6
6	011	7 / 1 / 5
7	111	2 / 4 / 6



Per la trattazione teorica dell'inverter Trifase conviene adottare una rappresentazione Vettoriale considerando un carico simmetrico nelle tensioni ed equilibrato nelle correnti. e collegato a stella.

Si prende come riferimento il vettore tensione V_1 orientato secondo l'asse Reale ed i vettori V_3 e V_5 sfasati fra loro di 120° .

Complementando lo Stato otteniamo i vettori opposti: $V_4 = -V_1$, $V_6 = -V_3$, $V_2 = -V_5$

Nella tabella in alto solo indicate le transizioni Single per passare da un vettore ad un altro ; è conveniente usare queste transizioni , dove commuta una sola gamba , per minimizzare le perdite.

Le **Tensioni di Polo (Pa , Pb ,Pc)** sono i Potenziali assunti dalle tre gambe di inverter e variano fra **0** e **V_{dc}** (in tabella indicata semplicemente con **V**) ; la loro differenza ci da le **3 Tensioni di Linea V_L** indicate con **V_{a-b}** , **V_{b-c}** , **V_{c-a}** ; per un carico collegato a Triangolo , queste 3 tensioni coincidono con le Tensioni di Fase del carico.

Per un carico collegato a Stella le Tensioni di Fase **V_a** , **V_b** , **V_c** sono la differenza fra potenziali di polo ed il potenziale del centro stella **P0 = (Pa + Pb + Pc) / 3** .

Vec State	Pc	Pb	Pa	P0	Va	Vb	Vc	Va-b	Vb-c	Vc-a	I _{dc}	
1	001	0	0	V	$1/3 V$	$+2/3V$	$-1/3V$	$-1/3V$	+V	0	-V	+I_a
2	101	V	0	V	$2/3 V$	$+1/3V$	$-2/3V$	$+1/3V$	+V	-V	0	I_a+I_c = -I_b
3	100	V	0	0	$1/3 V$	$-1/3V$	$-1/3V$	$+2/3V$	0	-V	+V	+I_c
4	110	V	V	0	$2/3 V$	$-2/3V$	$+1/3V$	$+1/3V$	-V	0	+V	I_c+I_b = -I_a
5	010	0	V	0	$1/3 V$	$-1/3V$	$+2/3V$	$-1/3V$	-V	+V	0	+I_b
6	011	0	V	V	$2/3 V$	$+1/3V$	$+1/3V$	$-2/3V$	0	+V	-V	I_b+I_a = -I_c

Dalla tabella notiamo che al variare del vettore in senso antiorario ogni 60° , i Potenziali di Polo sono 3 Onde Quadre sfasate di 120° con valori fra **0** e **+V_{dc}** mentre le Tensioni di Linea sono a valor medio nullo e variano fra **+V_{dc}** e **-V_{dc}** ; in una stella le Tensioni di Fase variano fra **$+2/3V_{dc}$** e **$-2/3V_{dc}$** .

A seconda dello State dell'inverter , le 3 Correnti di Linea **I_a** , **I_b** , **I_c** ce le ritroviamo nella I_{dc} con segno alternato. Per un carico a **Stella** le Correnti Fase di coincidono con le Correnti di Linea mentre in un carico a **Triangolo** le 3 Correnti di Fase sono: **I_a - I_b** , **I_b - I_c** , **I_c - I_a** .

In un **SISTEMA TRIFASE IDEALE** (simmetrico nelle Tensioni ed equilibrato nelle Correnti)

Lo SFASAMENTO di tutte le grandezze e di 120°

La SOMMA delle 3 Tensioni o 3 Correnti sia Fase che Linea è sempre NULLA

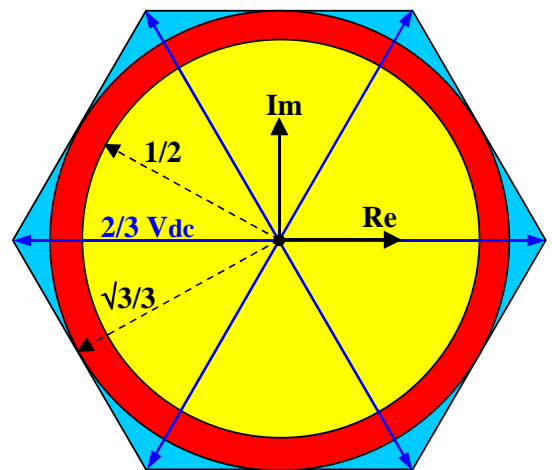
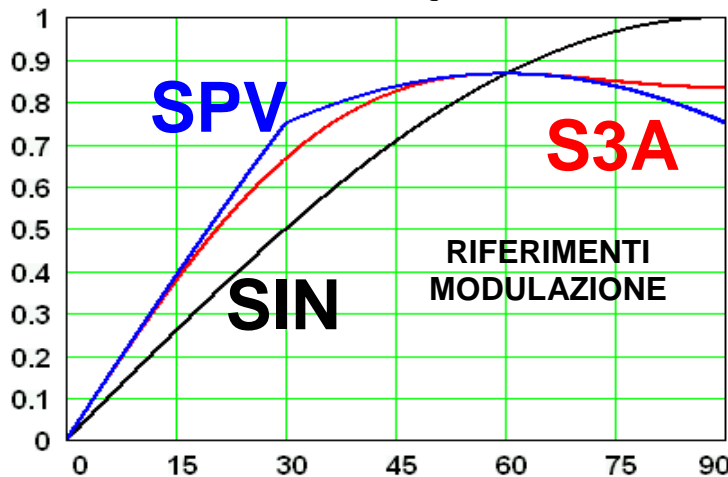
A Regime la POTENZA TOTALE (sia Attiva che Reattiva) è COSTANTE

Nel Carico o in Linea NON esistono ARMONICHE multiple di 3

Sommando ai **3 Potenziali di Polo** una generica tensione (anche variabile nel tempo) o sommando ad ognuno di essi Armoniche multiple di 3 , le Tensioni e Correnti di Linea e Fase restano **IDENTICHE**.

Se con un inverter trifase moduliamo sinusoidalmente l' Onda Quadra dei Potenziali di Polo otteniamo una terna di sinusoidi sfasate fra loro di 120° di Ampiezza Massima $V_{pk} = \frac{1}{2} V_{dc}$; i vettori generati saranno quindi interni alla zona gialla di raggio $\frac{1}{2} V_{dc}$ illustrata in figura.

Utilizzando le proprietà espresse al fondo della pagina precedente , possiamo utilizzare altre strategie di modulazione per meglio sfruttare l' esagono delle tensioni che ha cerchio inscritto di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3} V_{dc}$ Utilizzando come Riferimenti di Modulazione non più la modulazione Naturale **SIN** ma ad esempio una **S3A** (Iniezione di 3° armonica di ampiezza 1/6) o una **SPV** (Space-Vector : $\frac{3}{2} \sin(\alpha)$ sino a 30° e $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\alpha + \pi/6)$ oltre i 30°) otterremo vettori che potranno raggiungere il cerchio inscritto all' esagono e raggiungere una ampiezza di picco (coincidente con il modulo del vettore) $\frac{\sqrt{3}}{3} V_{dc}$ anche nella zona rossa ; otterremo quindi un incremento di $\frac{2}{3} \sqrt{3} \approx 1,1547$ dei moduli dei vettori.



Lo stato completo dell' inverter trifase è definito quindi da un solo vettore rappresentativo (dato che gli altri 2 avranno lo stesso modulo ma saranno sfasati di 120°) ; sino a quando l' estremità di questo vettore descrive una traiettoria circolare avremo Tensioni di Linea Sinusoidali (anche se i potenziali di polo non lo sono) , oltre il cerchio inscritto (zona blu) avremo distorsioni che raggiungeranno l' apice dell' Onda Quadra quando il vettore percorrerà a scatti di 60° (six-step) il perimetro dell' esagono.

Le 3 Tensioni di Linea (se Sinusoidali) hanno una ampiezza massima $\sqrt{3}$ maggiore del modulo del vettore ed assumono valore di picco di $\frac{\sqrt{3}}{2} V_{dc}$ nella modulazione SIN o V_{dc} nelle altre.

Es. Volendo ottenere una alimentazione **Trifase Sinusoidale a 400V**: le tensioni di linea avranno valore efficace di 400 V e quindi valore massimo $400\sqrt{2}$ V ; con modulazione SIN dovremo partire da un bus con $V_{dc} = \frac{2}{\sqrt{3}} * 400\sqrt{2} \approx +653$ V mentre per le altre basterà un bus con $V_{dc} = 400\sqrt{2} \approx +566$ V E' da notare che di modulazioni "altre" ne esistono moltissime ed ognuna di queste ha i propri pro e contro ; il loro spettro di distorsione armonica dipende da moltissimi fattori fra cui se si considerano Tensioni o Correnti o Potenze e dal Coefficiente di Modulazione che è meglio conoscere dato che ne esistono diverse formulazione. $K_v = \frac{M_{vec}}{V_{dc}}$ si calcola come rapporto fra il Modulo del Vettore che si vuole ottenere e la V_{dc} in quell' istante disponibile ; in percentuale $K_{vp} = 100 K_v$.

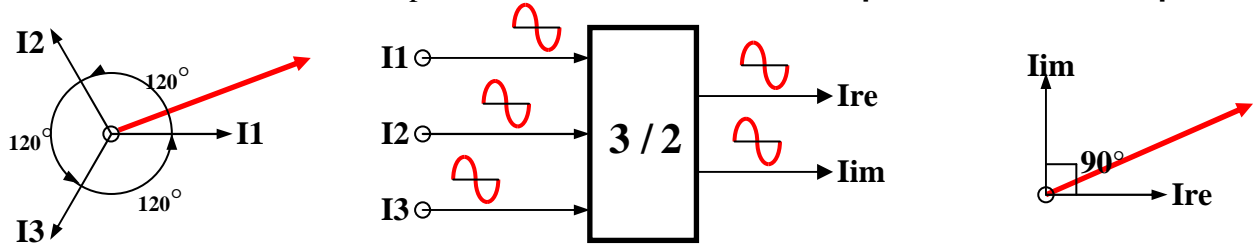
ZONE	K_v	$K_{mod} = K_{vp} \cdot 2$	$K_{vp} \cdot \sqrt{3}$	$K_{vp} \cdot \pi / 2$
NOR SINE	$1 / 2 = 0,500$	1 0 0	86,603	78,540
EXT SINE	$\sqrt{3} / 3 = 0,577$	115,470	100	90,690
SAT SINE	$2 / \pi = 0,637$	127,324	110,266	100



In letteratura si trovano le più disparate definizioni ed anche con lettere diverse (Es. "m") , ma il **concetto** è sempre **unico** ; questa tabellina può aiutarvi a districarvi nella selva delle definizioni.

Per facilitare lo studio vettoriale di un sistema trifase si utilizza la **TRASFORMATA di CLARKE** che permette, con semplicissime operazioni algebriche, di passare ad un sistema Bifase dove i conti si semplificano notevolmente perchè il vettore rappresentativo ha solo le due componenti Reale ed Immaginaria che soprattutto sono ortogonali fra loro.

La trasformata di Clarke è valida sia per **tensioni e correnti comunque variabili nel tempo**.



DIRETTA 3ph → 2ph $X_{re} = X_1$ $X_{im} = \sqrt{3/3} (X_3 - X_2)$
INVERSA 2ph → 3ph $X_1 = X_{re}$ $X_2 = -(\sqrt{3/2} X_{im} + 1/2 X_{re})$ $X_3 = -(X_1 + X_2)$

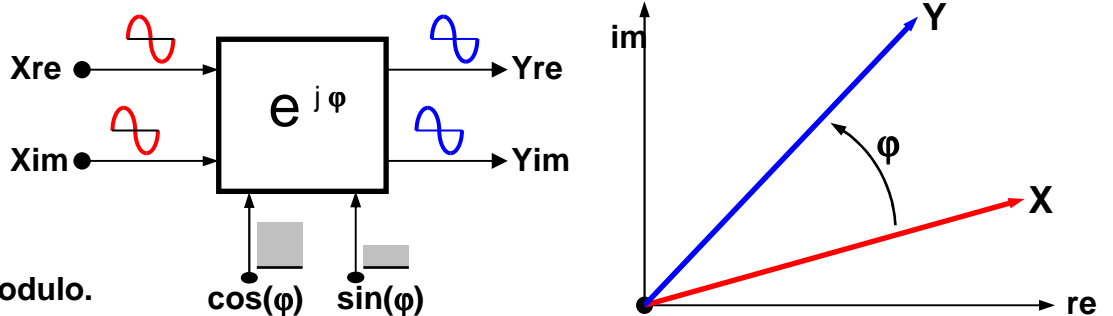
Dopo aver calcolato tutto ciò che vogliamo nel sistema bifase possiamo riportare i risultati nel sistema trifase con la semplice applicazione della Trasformata **INVERSA**.

In un piano complesso (Bifase), tramite la **TRASFORMATA di PARK** (diretta o inversa) possiamo compiere molte operazioni complesse (ma in modo elementare) sui nostri vettori.

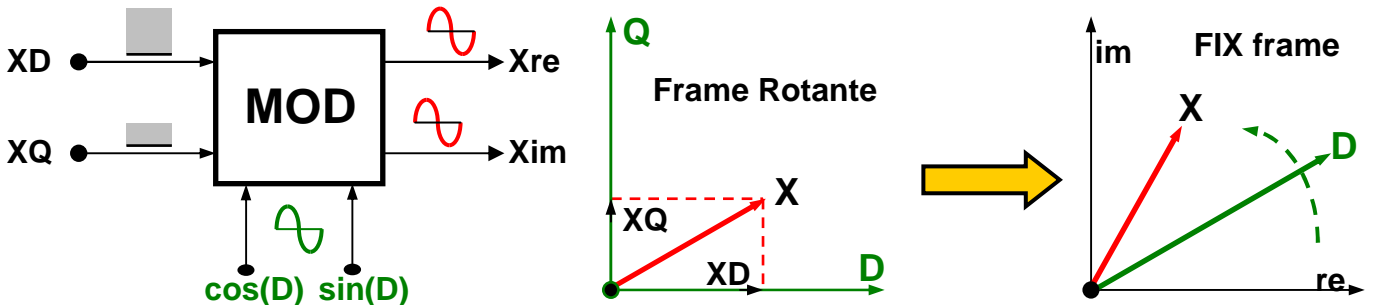
$$Y = X e^{j\phi} \quad Y_{re} = X_{re} \cos(\phi) - X_{im} \sin(\phi) \quad Y_{im} = X_{im} \cos(\phi) + X_{re} \sin(\phi)$$

$$X = Y / e^{j\phi} \quad X_{re} = Y_{re} \cos(\phi) + Y_{im} \sin(\phi) \quad X_{im} = Y_{im} \cos(\phi) - Y_{re} \sin(\phi)$$

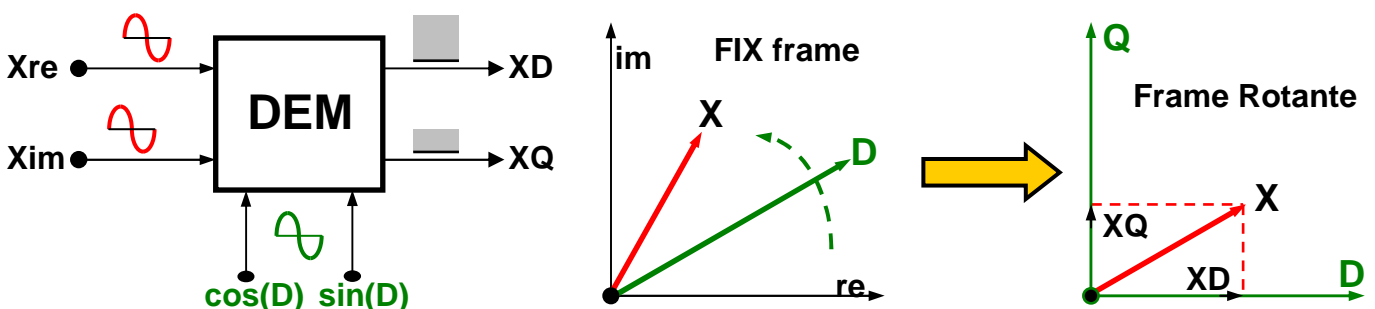
Possiamo ad esempio **SFASARE** il Vettore X di un angolo ϕ per ottenere il Vettore Y con lo stesso modulo.



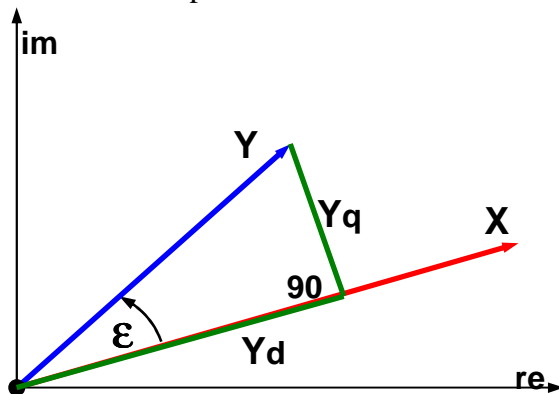
Possiamo **MODULARE** le componenti D & Q di un Vettore Statico in un Frame Rotante per ottenere un Vettore Rotante in un Frame Fisso



Possiamo **DEMULARE** un Vettore Rotante in un Frame Fisso per ottenere le componenti D & Q di un Vettore Statico in un Frame Rotante



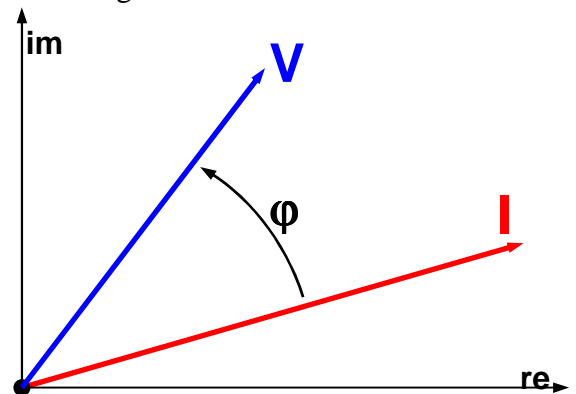
In un piano complesso (frame fisso) è molto semplice calcolare le **Componenti Yd & Yq** di un **Vettore Y** rispetto alle direzioni **Diretta** ed in **Quadratura** di un generico **Vettore X**.



$$Y_d = |Y| \cos(\epsilon) \quad Y_q = |Y| \sin(\epsilon)$$

$$Y_d = (X_{re} Y_{re} + X_{im} Y_{im}) / |X|$$

$$Y_q = (X_{im} Y_{re} - X_{re} Y_{im}) / |X|$$



$$P = \frac{1}{2} |V| |I| \cos(\phi) \quad Q = \frac{1}{2} |V| |I| \sin(\phi)$$

$$P = \frac{1}{2} (I_{re} V_{re} + I_{im} V_{im})$$

$$Q = \frac{1}{2} (I_{im} V_{re} - I_{re} V_{im})$$

Nello stesso piano è anche semplice calcolare i **valori istantanei** delle **Potenze Attiva e Reattiva**.

A tal proposito facciamo alcune precisazioni. In un sistema monofase è ben nota la formula di Elettrotecnica Classica per regime Sinusoidale $P = V_{RMS} * I_{RMS} * \cos(\phi)$; sostituendo in questa i valori di picco ($\sqrt{2}$ volte maggiori di quelli efficaci) otteniamo: $P = \frac{1}{2} * V_{PK} * I_{PK} * \cos(\phi)$

Dato che il modulo di un vettore corrisponde al valore di picco di una sinusoidale, in controllistica vettoriale si è soliti adottare valori di **PICCO** riferiti ad **una FASE**; quindi per un sistema Trifase operando sui vettori rappresentativi di Tensione V e Corrente I in valore di Picco & Fase si ha:

$P = \frac{3}{2} * V_{PK} * I_{PK} * \cos(\phi) = \frac{3}{2} (I_{re} V_{re} + I_{im} V_{im})$ ritornando ai valori efficaci e considerando le tensioni di linea, ritroviamo la nota formula: $P = \sqrt{3} * V_{RMS} * I_{RMS} * \cos(\phi)$

Note le Potenze Attiva & Reattiva è facile calcolare la Potenza Apparente: $A = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Un vettore X può essere dato come: $X = X_{re} + j X_{im} = M [\cos(\phi) + j \sin(\phi)] = M e^{j\phi}$

il suo modulo è: $M = \sqrt{X_{re}^2 + X_{im}^2}$ ed il suo inverso è: $1/X = (X_{re} - j X_{im}) / M^2$

Viste queste semplici operazioni vettoriali ritorniamo al **Classico Sistema Trifase Ideale**.

Una linea di trasporto di Energia Elettrica è in genere composta da 4 conduttori.

Tre conduttori portano la Corrente di Linea mentre il quarto è il Neutro che rappresenta il Centro Stella del sistema e nel caso ideale non dovrebbe condurre corrente.

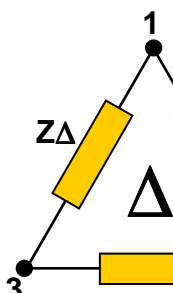
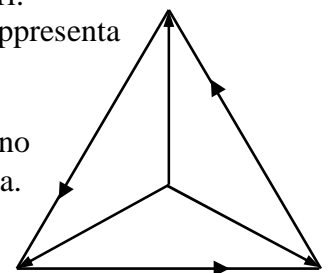
Le 3 tensioni fra i conduttori attivi sono le 3 Tensioni di Linea (Es. 400V_{RMS})

Fra un Conduttore attivo ed il Neutro si collegano le utenze Monofasi che hanno

una tensione nominale $\sqrt{3}$ volte minore (Es. 230V_{RMS}) delle Tensioni di Linea.

Le utenze Monofasi dovrebbero essere Equilibrate nelle Correnti per non compromettere la Simmetria del sistema ($V_{L1} = V_{L2} = V_{L3}$)

I Carichi Trifasi possono essere collegati a Triangolo o a Stella.



TRASFORMAZIONI Δ / Y per caso IDEALE

$$Z_{\Delta} = 3 Z_Y$$

$$L_{\Delta} = 3 L_Y$$

$$C_{\Delta} = C_Y / 3$$

$$V_{f\Delta} = \sqrt{3} V_{fY}$$

$$I_{f\Delta} = I_{fY} / \sqrt{3}$$

$$V_{f\Delta} = V_{LINEA}$$

$$P_{\Delta} = P_Y$$

$$Q_{\Delta} = Q_Y$$

$$Z_Y = Z_{\Delta} / 3$$

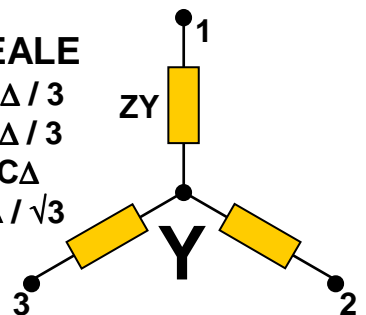
$$L_Y = L_{\Delta} / 3$$

$$C_Y = 3 C_{\Delta}$$

$$V_{fY} = V_{f\Delta} / \sqrt{3}$$

$$I_{fY} = \sqrt{3} I_{f\Delta}$$

$$I_{fY} = I_{LINEA}$$



I **Vettori** rappresentativi di Tensione e Corrente sono sfasati di **30°** passando da Stella a Triangolo !

Dovendo iniettare corrente su di una linea monofase (Es. 230Vac , 50Hz) , tramite un inverter dovremo generare una tensione **Vi** che vettorialmente sia la somma della tensione di rete (grid) **Vg** con una tensione di Set **Vs** tale che applicata ad una impedenza **Z** ci dia la corrente voluta.

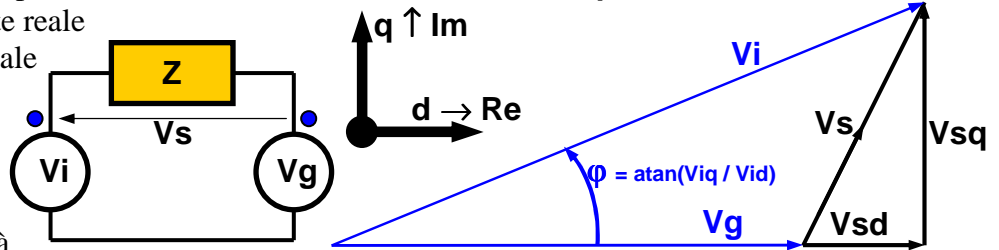
Studieremo il sistema in un frame rotante **d & q** in modo che i vettori a 50Hz appaiano statici.

Consideriamo un caso ideale dove è tutto noto ; la tensione che vogliamo iniettare **Is** dovrà essere in fase con **Vg** , quindi le componenti di **Vs** saranno : **Vsd = R * Is** & **Vsq = X * Is**

Supponendo **Vg** puramente reale anche **Is** sarà puramente reale

In genere la **Z = R + jX** ha una reattanza **X >> R** e quindi **Vsq >> Vsd**

La tensione che dobbiamo generare con l'inverter avrà



quindi un modulo maggiore di **Vg** e sarà in anticipo su di essa di un angolo ϕ ; tutte le grandezze di sistema sono facilmente calcolabili partendo dai parametri **X & R** dell'impedenza **Z** che in questo caso è la somma vettoriale della impedenza di linea e della impedenza da noi posta per iniettare in linea.

Passando ad un caso Pseudoideale , supponiamo di aver dato e misurato una tensione **Vm** maggiore di della **Vs ideale** ; in questo caso inietteremo una corrente **Im** maggiore di quella voluta ; detti **Ve** l'errore di tensione data e **le** l'errore di corrente ottenuta , le semplici relazioni vettoriali sono le seguenti :

$$Z=R+j \cdot X \quad Is=Isd \quad Ie=Ied+j \cdot Ieq \quad Im=Is+Ie=(Isd+Ied)+j \cdot Ieq$$

$$Vs=Is \cdot Z=R \cdot Isd+j \cdot X \cdot Isd \quad Ve=Ie \cdot Z=(R \cdot Ied - X \cdot Ieq)+j \cdot (R \cdot Ieq+X \cdot Ied)$$

$$Vm=Im \cdot Z=(R \cdot (Isd+Ied) - X \cdot Ieq)+j \cdot (R \cdot Ieq+X \cdot (Isd+Ied))$$

$$Vsd=R \cdot Isd \quad Vsq=X \cdot Isd \quad Ved=R \cdot Ied - X \cdot Ieq \quad Veq=R \cdot Ieq+X \cdot Ied$$

$$Vmd=R \cdot (Isd+Ied) - X \cdot Ieq \quad Vmq=R \cdot Ieq+X \cdot (Isd+Ied)$$

Note quindi le componenti **Ied** ed **Ieq** dell'errore di corrente **Ie** è possibile calcolare **Ve** per riottenere **Vs = Vm - Ve** e fare in modo che **Is ritorni in fase e con il modulo voluto**.

Si può inoltre notare che l'angolo di sfasamento di **Vm** su **Vs** coincide con l'angolo di sfasamento di **Im** su **Is** ed inoltre che l'incremento di **|Im|** coincide con l'incremento di **|Is|**.

Tutto questo si deduce dal fatto che **Z** rimane costante.

Se invece consideriamo il caso che l'impedenza vari sia

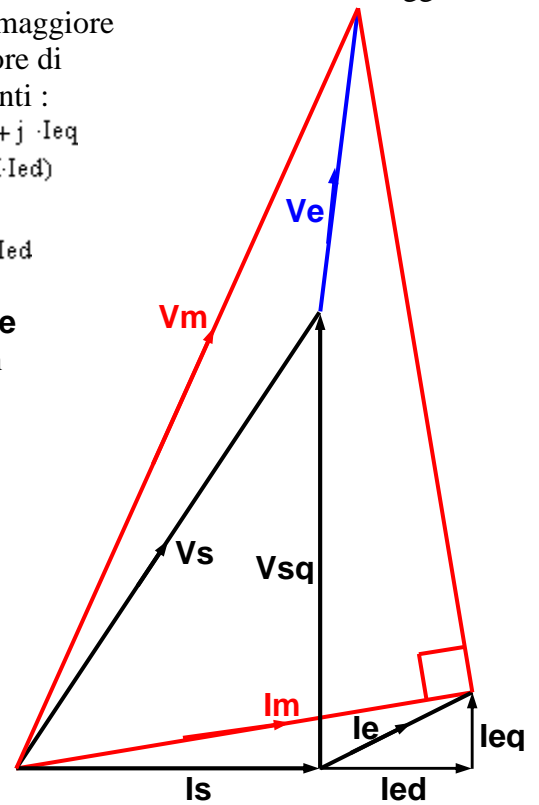
in **X** che in **R** secondo la relazione $Z_e=R \cdot K_r+j \cdot X \cdot K_x$

pur dando la giusta **Vs** , otterremo un corrente errore **Ie**

$$Ieq=Isd \cdot \frac{X \cdot R \cdot (K_r - K_x)}{R^2 \cdot K_r^2 + X^2 \cdot K_x^2} \quad Ied=Isd \cdot \frac{R^2 \cdot (K_r - K_x^2) + X^2 \cdot (K_x - K_x^2)}{R^2 \cdot K_r^2 + X^2 \cdot K_x^2}$$

Se consideriamo **R = 0** (o molto piccola rispetto ad **X**)

$$\text{otteniamo: } Ied=Isd \cdot \frac{1 - K_x}{K_x} \quad Ieq=0 \quad \text{con conseguente } Ved=0 \quad \text{\& } \mathbf{Veq = Isd \cdot X \cdot (1 - K_x)}$$



Questa ultima relazione può essere utile per una stima parametrica delle possibili variazioni di **X**.

In questa trattazione generale abbiamo ipotizzato di conoscere tutti i parametri di sistema ed in particolar modo di poter misurare ad ogni iterazione la esatta frequenza di rete in modo da poter calcolare la reattanza $X = j \omega L$ e modulo e fase dei vettori **Vg** , **Vs** , **Im** onde calcolare **Vi**.

Se nel sistema esistono anche capacità le si possono conglobare in **X** dato che $X_c = -j / (\omega C)$.

Supponendo di utilizzare una regolazione iterativa a convergenza , dovremo utilizzare un modello della nostra impedenza **Z** ed il primo approccio sarà quello di considerare **Z** costante ; sotto questa ipotesi potremo scindere gli errori di **Im** relativamente ad **Is** in **errori di Fase** ed **errori di Modulo**.

Se **Im** resta in fase e nasce solo un errore di modulo basterà compensare solo il modulo di **Vs** mentre se **Im** ha un modulo esatto e solo un errore di fase , basterà compensare solo la fase di **Vs**.

Somma Vettoriale FAST

Avendo misurato il vettore A e dovendo sommarli il vettore B onde ottenere il vettore C, si possono seguire molti metodi classici; per ottenere il modulo e la fase del vettore C ne possiamo calcolare le componenti reale ed immaginaria a partire dalle componenti di A & B

$$C_{re} = A + B \cos(\beta) \quad C_{im} = B \sin(\beta)$$

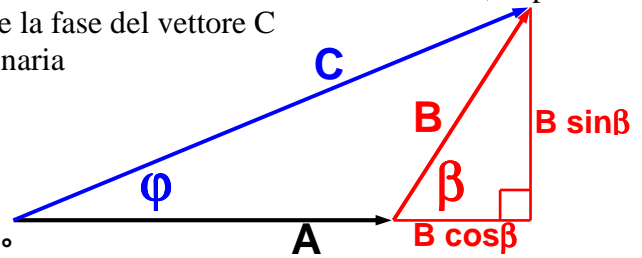
$$|C| = \sqrt{(C_{re}^2 + C_{im}^2)} \quad \phi = \text{atan}(C_{im} / C_{re})$$

Un semplice esempio numerico chiarirà il concetto.

Supponiamo $|A| = 5$ con $\alpha = 0$, $|B| = 4$ con $\beta = 60^\circ$

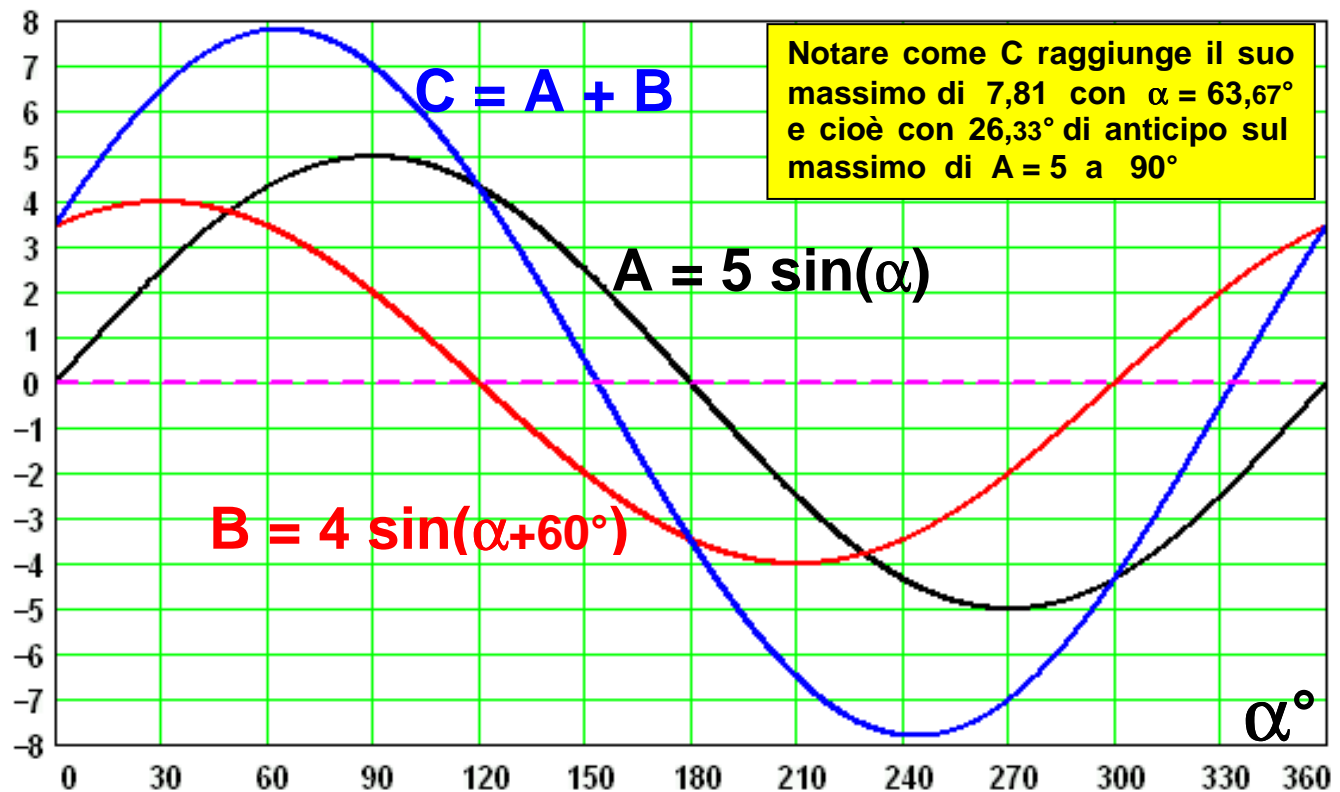
$$\cos(\beta) = 1/2 \quad \sin(\beta) = \sqrt{3}/2 \quad \rightarrow \quad B \cos(\beta) = 2 \quad B \sin(\beta) = 2\sqrt{3}$$

$$C_{re} = 7 \quad C_{im} = 2\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad |C| = \sqrt{61} \approx 7,81 \quad \phi = \text{atan}(2\sqrt{3}/7) \approx 26,33^\circ$$



Solo per sommare due vettori dobbiamo eseguire molte operazioni elementari ed inoltre calcolare una radice quadrata ed una atan; ritornando alla pagina precedente, in un caso reale dovremo effettuare il calcolo del **Vettore Somma C** da iniettare in rete in real-time almeno ogni 50us e quindi la soluzione canonica ci porterebbe via troppo tempo; una soluzione alternativa (ma esatta) sarà preferibile.

Riprendendo il nostro esempio numerico osserviamo questo grafico; considerando che ogni 50us avremo a disposizione la **misura istantanea della sinusoide di rete A**; la sua **fase alpha** viene normalmente dedotta tramite un PLL con DFT che si avvale di **riferimenti Seno & Coseno** di ampiezza unitaria tabellati in LUT che ci verranno utili anche per l'operazione di somma.



Ad ogni iterazione avremo a disposizione il valore istantaneo di A ed il valore di alpha; sommiamo ad alpha l'angolo beta di B e con tale angolo dal riferimento Seno ricaviamo il valore corrispondente che moltiplicheremo per il modulo di B; questo valore sommato ad A ci darà il **valore istantaneo di C** che potremo imporre direttamente all'inverter **prescindendo dalla conoscenza dell'angolo phi**.

Es. Supponiamo $\alpha = 90^\circ$ e misura istantanea di $A = 5$; $90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ dalla tabella Seno in corrispondenza dei 150° troviamo 0,5 che moltiplicato per 4 ci dà 2 che sommato a 5 ci dà 7.

Questo metodo scalare, molto semplice ma esatto, ci permette di effettuare l'operazione di Somma vettoriale in tempi brevissimi; tale operazione di somma deve essere effettuata ad ogni iterazione (es. ogni 50us) mentre il calcolo di modulo e fase di B (in funzione della corrente che si vuole iniettare) può essere effettuato su tempi più lunghi (Es. ogni 200us o 400us o 800us) schedulando i vari task.

Identificazione di **A** e **α**

Visto questo, il problema si riduce ora alla determinazione dell'angolo di fase **α** e della ampiezza **A** della sinusoide di rete (Vgrid), dove tali parametri sono entrambe affetti da forte o fortissimo noise. In genere si opta per un SW di tipo PLL previo opportuno filtraggio sia di fase che ampiezza; scartando a priori la misura del semiperiodo ai passaggi per lo zero si possono considerare metodi basati su DFT alla frequenza fondamentale o su trasformata di Park generalizzata; è facile reperire in letteratura molti articoli tecnici dedicati a tali argomenti.

Un metodo alternativo ma molto efficiente è quello di effettuare una **Identificazione Parametrica**.

Conoscendo $Y = A \cdot \sin(\alpha)$ si può stimare $\hat{Y} = \hat{A} \cdot \sin(\hat{\alpha})$ dove i parametri da stimare sono \hat{A} e $\hat{\alpha}$.

Noto ad ogni iterazione l'errore $\Delta Y = Y - \hat{Y}$ fra le due funzioni, sviluppando in serie di Taylor tale errore, otteniamo: $\Delta Y = Y - \hat{Y} = \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \hat{A}}\right) \cdot \Delta \hat{A} + \left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \hat{\alpha}}\right) \cdot \Delta \hat{\alpha}$ e cioè la dipendenza parametrica dell'errore.

Dato che $\left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \hat{A}}\right) = \sin(\hat{\alpha})$ e $\left(\frac{\partial \hat{Y}}{\partial \hat{\alpha}}\right) = \hat{A} \cdot \cos(\hat{\alpha})$, otteniamo: 0) $\Delta Y = \sin(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{A} + \hat{A} \cdot \cos(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{\alpha}$

Risolvendo la 0) rispetto alle variazioni parametriche otteniamo due relazioni per ora interdipendenti:

$$1) \Delta \hat{A} = \frac{\Delta Y - \hat{A} \cdot \cos(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{\alpha}}{\sin(\hat{\alpha})} \quad 2) \Delta \hat{\alpha} = \frac{\Delta Y - \sin(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{A}}{\hat{A} \cdot \cos(\hat{\alpha})}$$

Per eliminare la interdipendenza abbiamo bisogno di un altro Segnale; una soluzione comoda ed efficace consiste nel considerare la Derivata della sinusoide, che simbolicamente chiameremo D.

$$D = \frac{dY}{dt} = A \cdot \cos(\alpha) \quad \hat{D} = \frac{d\hat{Y}}{dt} = \hat{A} \cdot \cos(\hat{\alpha}) \quad \Delta D = D - \hat{D} = \left(\frac{\partial \hat{D}}{\partial \hat{A}}\right) \cdot \Delta \hat{A} + \left(\frac{\partial \hat{D}}{\partial \hat{\alpha}}\right) \cdot \Delta \hat{\alpha}$$

Considerando che l'errore della Derivata ΔD coincide con la Derivata dell'errore ΔY ed operando

come prima, otteniamo: 3) $\Delta \hat{A} = \frac{\Delta D + \hat{A} \cdot \sin(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{\alpha}}{\cos(\hat{\alpha})}$ 4) $\Delta \hat{\alpha} = \frac{\Delta D + \cos(\hat{\alpha}) \cdot \Delta \hat{A}}{\hat{A} \cdot \sin(\hat{\alpha})}$

Eguagliando la 1) con la 3) e risolvendo otteniamo: 5) $\Delta \hat{\alpha} = \frac{\Delta Y \cdot \cos(\hat{\alpha}) - \Delta D \cdot \sin(\hat{\alpha})}{\hat{A}}$

Eguagliando la 2) con la 4) e risolvendo otteniamo: 6) $\Delta \hat{A} = \Delta Y \cdot \sin(\hat{\alpha}) + \Delta D \cdot \cos(\hat{\alpha})$

Queste due ultime relazioni ci danno la variazione dei due parametri cercati solo in funzione dell'errore della funzione e della sua derivata; queste relazioni permettono di applicare un qualsiasi metodo di stima (anche il noto metodo del Gradiente Semplice, vedi pag.46 - 47) per determinare l'ampiezza e l'angolo di una generica Sinusoide.

Una opportuna scelta dei Guadagni di stima permetterà una dinamica ottimizzata allo scopo specifico.

Ho condotto una serie di simulazioni su algoritmi basati sia sui metodi classici che su quello qui proposto ed i risultati ottenuti sono stati decisamente a favore di questo ultimo metodo.

Il metodo proposto è molto reattivo al noise sia di Frequenza che di Fase che di Ampiezza.

Una semplice variazione sui Guadagni di Stima permette di privilegiare Velocità di Risposta o Reiezione al Noise.

L'implementazione pratica dell'algoritmo si riduce a pochissimi calcoli rel-time e quasi tutti di tipo MAC e quindi facilmente gestibili da CPU o DSP o FPGA.

Nelle pagine successive vedremo il Listing di principio e alcune performances dinamiche in funzione di stimoli di Frequenza, Fase e Ampiezza variate, come worst-case, a gradino.

Il simulatore è stato concepito con frequenza nominale di 50Hz e range operativo compreso fra 40 Hz ed 60 Hz; il tempo elementare di simulazione è di 50us che corrisponde ad una frequenza di 20KHz.

Algoritmo di Stima

In questa descrizione sintetica, le Costanti GYS , GYC , GDS , GDC , sono i guadagni di Stima

$$\text{AngG} = \text{AngG} + \text{IaG} : \text{LIMANG AngG} : \text{Vg} = \text{AmpG} * \text{SIN}(\text{AngG})$$

$$\text{Vg} = \text{Vg} + \text{VgRip} \quad \text{'Vg} = \text{Vgrid} , \text{VgRip} = \text{Vgrid Noise}$$

$$\text{AngR} = \text{AngR} + \text{IaR} : \text{LIMANG AngR} : \text{Sir} = \text{SIN}(\text{AngR}) : \text{CoR} = \text{COS}(\text{AngR})$$

$$\text{Vr} = \text{AmpR} * \text{Sir} \quad \text{'Vr} = \text{Vreference di Identificazione Stimato}$$

$$\text{Y3} = \text{Y2} : \text{Y2} = \text{Y1} : \text{Y1} = \text{Y0} : \text{Y0} = \text{Vg} - \text{Vr} \quad \text{'Y0} = \text{Errore Attuale}$$

$$\text{DeltaY} = ((\text{Y1} + \text{Y2}) * 8 - \text{Y0} - \text{Y3}) \quad \text{'Errore filtrato}$$

$$\text{DeltaD} = ((\text{Y0} - \text{Y3}) * 4 + \text{Y1} - \text{Y2}) \quad \text{'Derivata dell' Errore filtrata}$$

$$\text{ErrAmp} = \text{DeltaY} * \text{Sir} * \text{GYS} + \text{DeltaD} * \text{CoR} * \text{GDC}$$

$$\text{ErrAmp} = \text{ErrAmp} * \text{Gdin} \quad \text{'Errore di Ampiezza * Guadagno Dinamico}$$

$$\text{LIM ErrAmp}, -\text{LIMEA}, \text{LIMEA} \quad \text{'Limitazione dell' Errore}$$

$$\text{AmpR} = \text{AmpR} + \text{ErrAmp} \quad \text{'Ampiezza Stimata}$$

$$\text{ErrFas} = \text{DeltaY} * \text{CoR} * \text{GYC} - \text{DeltaD} * \text{Sir} * \text{GDS}$$

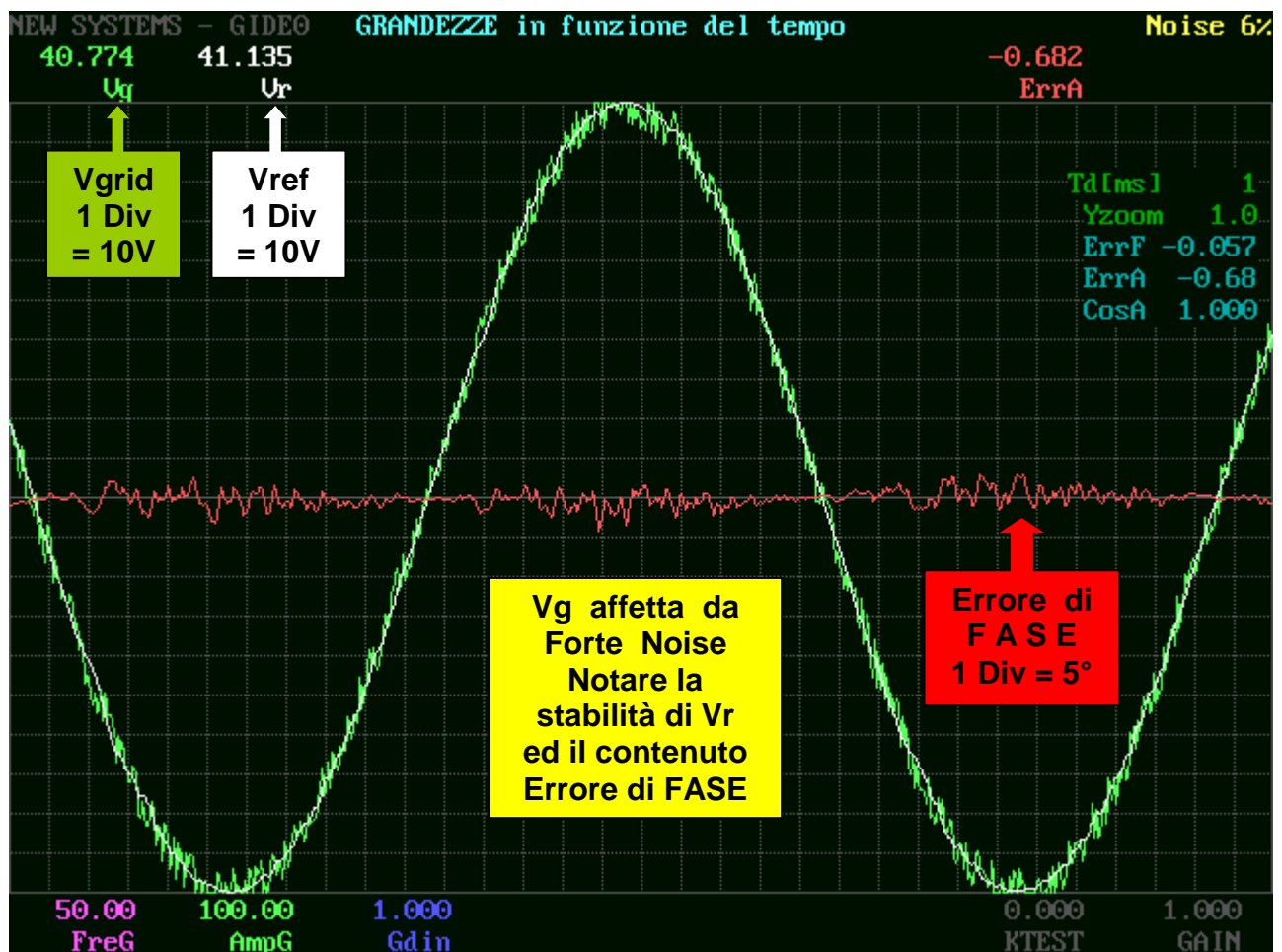
$$\text{ErrFas} = \text{ErrFas} * \text{INVG} \quad \text{'Adeguamento alla Vg Nominale}$$

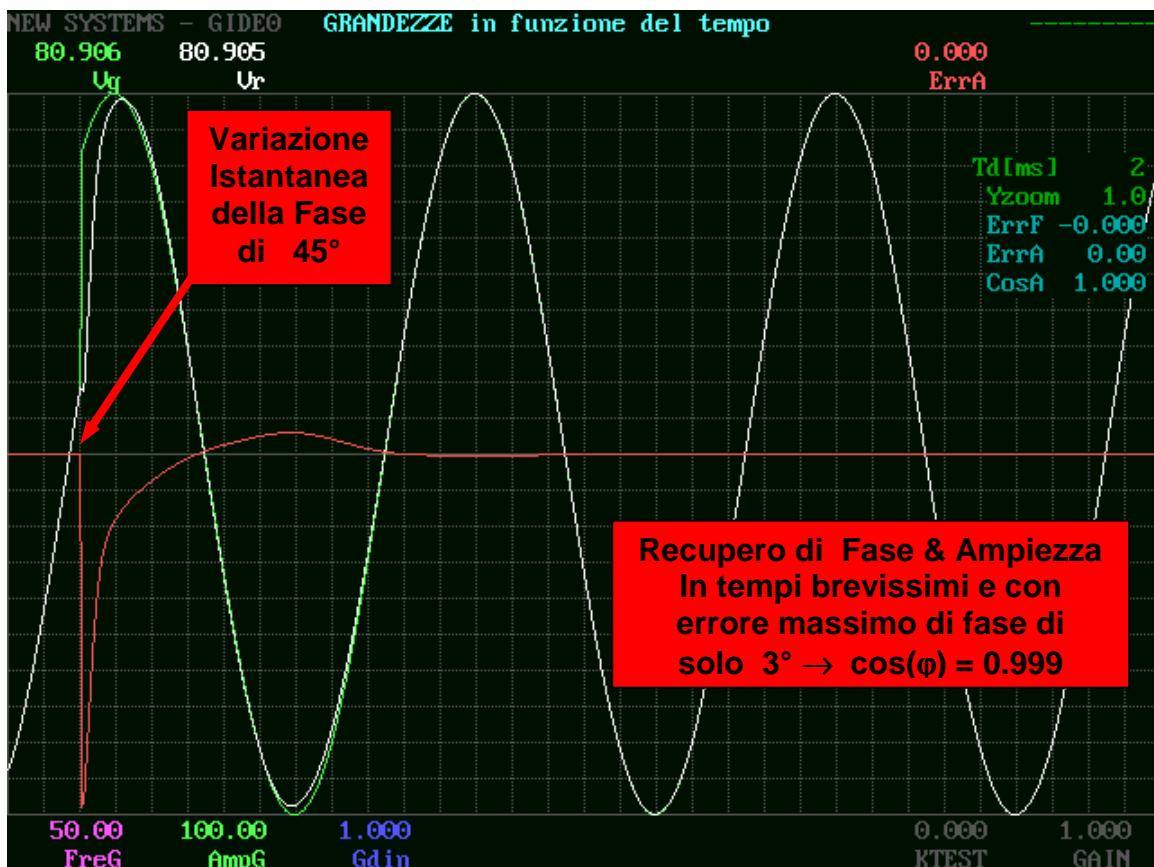
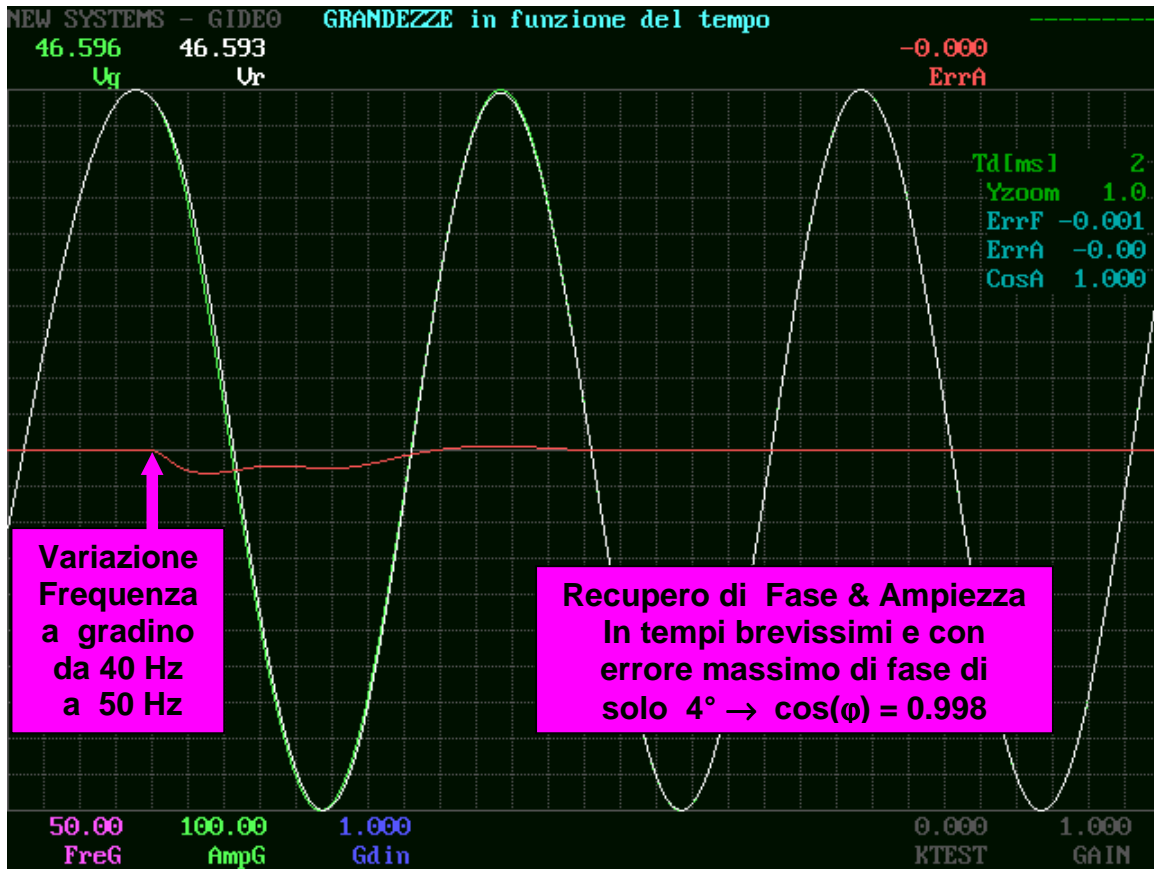
$$\text{ErrFas} = \text{ErrFas} * \text{Gdin} \quad \text{'Errore di Ampiezza * Guadagno Dinamico}$$

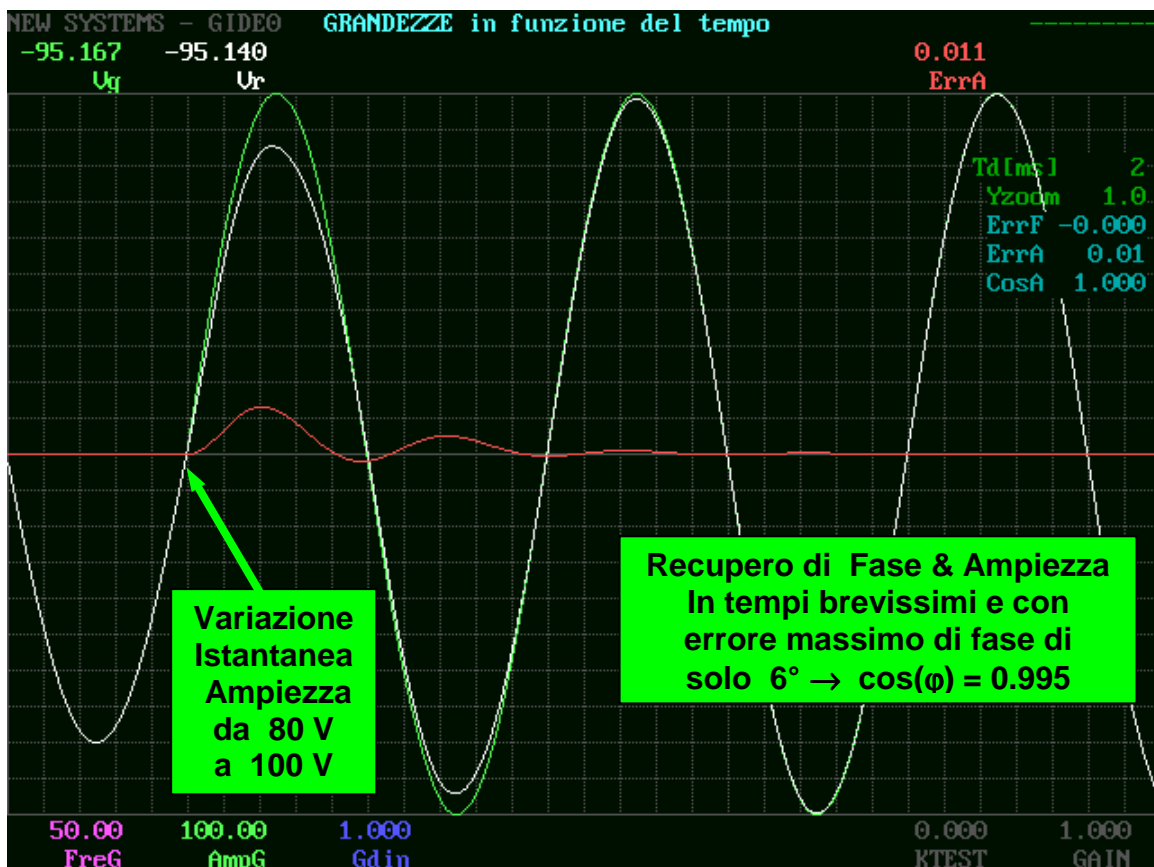
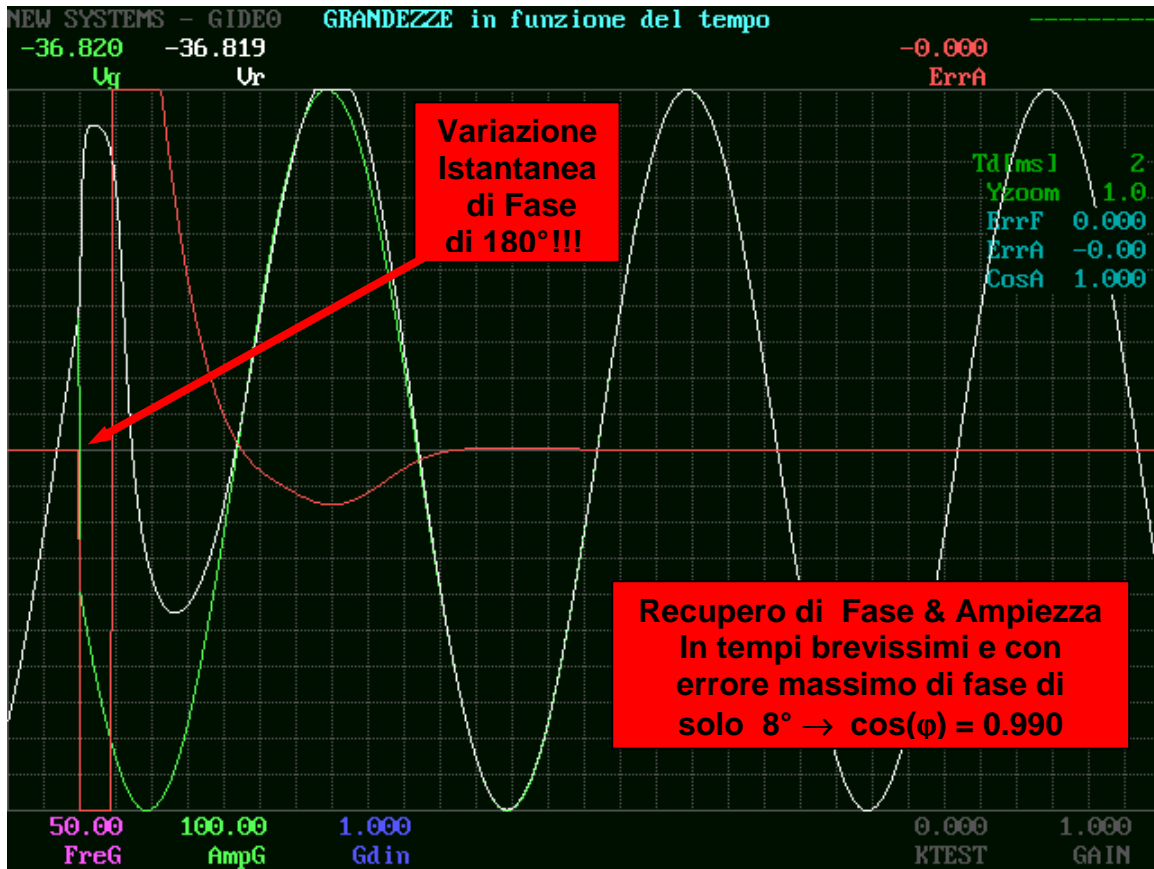
$$\text{AngR} = \text{AngR} + \text{ErrFas} \quad \text{'Angolo di Fase Stimato}$$

$$\text{ErrIA} = \text{ErrFas} : \text{LIM ErrIA}, -.0016, .0016 \quad \text{'Limitazione a +/- 0.092°}$$

$$\text{IaR} = \text{IaR} + \text{ErrIA} / 100 \quad \text{'Incremento Angolare per Frequenza Stimata}$$







L'algoritmo di identificazione visto in precedenza opera solo tramite funzioni lineari , ed anche se i risultati sono più che buoni per le applicazioni pratiche , è possibile introdurre delle compensazioni non lineari per ridurre le grandi variazioni di fase in poche iterazioni al range di linearità.

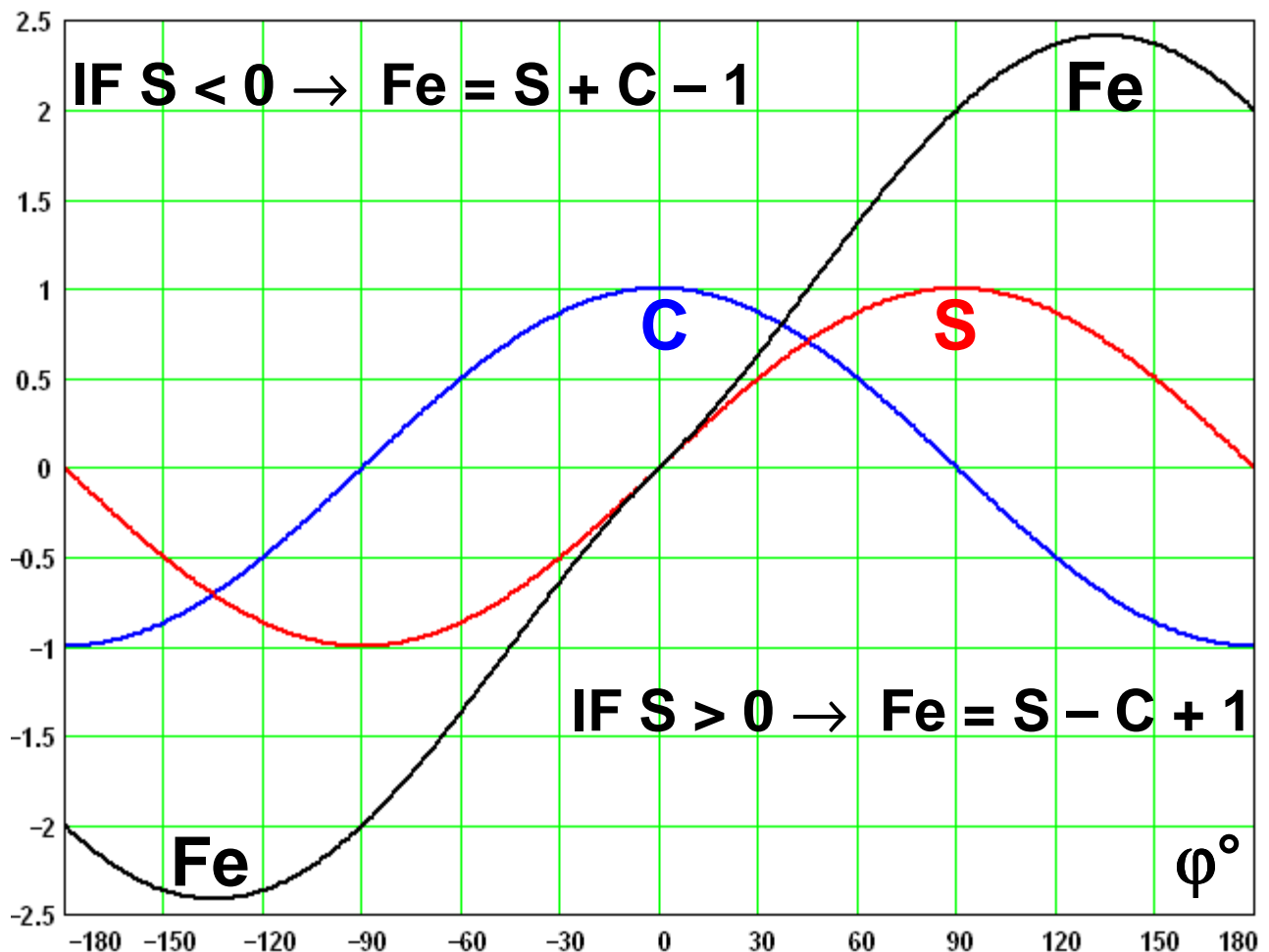
Si può ipotizzare ad esempio un intervento drastico quando l'errore di fase supera i $\pm 90^\circ$ per riportarlo in poche iterazioni in un range interno a $\pm 30^\circ$ (!!! $\cos(\varphi) = 0.8$ per $\varphi = 36,78^\circ$)

In genere qualsiasi sia il metodo adottato per la determinazione della fase (DFT , Park , o altri con ritardo di gruppo minore) avremo sempre a disposizione una componente Seno (S) e Coseno (C) dell'errore di fase.

La funzione S è un buon indicatore dell'errore di fase ma ha una buona linearità solo nell'intorno dello zero ed una linearità praticamente accettabile solo fino a circa $\pm 30^\circ$.

La funzione di errore di Fase **Fe** , definita nel grafico ha una buona linearità ($\pm 4\%$) in un range molto ampio di $\pm 90^\circ$ ed è praticamente accettabile in tutto il range operativo.

Nel range per $\varphi = \pm 90^\circ$ la Fe approssima la retta $Y = \varphi / 45$ assumendo i valori estremi di ± 2



Da un punto di vista puramente teorico è possibile estendere la Fe come praticamente lineare a tutto il range operativo di $\pm 180^\circ$, aggiungendo altri due IF a $\pm 90^\circ$ considerando il segno di C , ed aggiungendo opportune modifiche agli offset.

In questo caso puramente teorico , nel range per $\varphi = \pm 180^\circ$ la Fe approssimerebbe la retta $Y = \varphi / 45$ assumendo i valori estremi di ± 4

Un metodo molto efficace di Filtraggio consiste nell'applicare ad N punti di una data finestra di osservazione una **REGRESSIONE PARABOLICA** ai minimi quadrati.

Una volta determinati i parametri a, b, c, della parabola è possibile determinare il punto centrale del set di N punti acquisiti, che sarà molto immune al noise, sempre presente in ogni segnale.

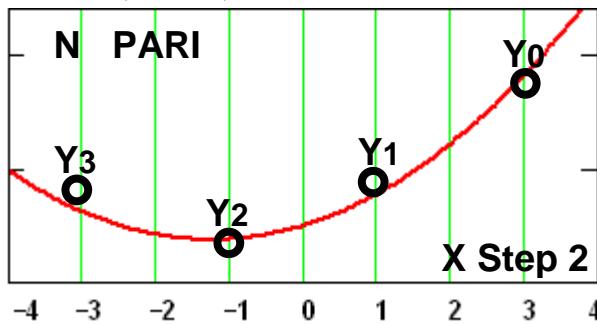
La conoscenza dell'equazione della parabola che rende minimo l'errore quadratico ci permette inoltre di calcolare la derivata del segnale nel punto centrale con noise molto ridotto, mentre se il calcolo fosse stato condotto con semplice equazione alle differenze finite avremmo ottenuto un dato molto sensibile al noise dato che il noise aumenta di un ordine di grandezza per ogni derivazione.

La scelta di una Parabola ci garantisce una ottima fedeltà di ricostruzione anche per segnali che variano con andamento sinusoidale.

Purtroppo, come è possibile constatare dalla trattazione Canonica, la determinazione dei tre parametri a, b, c, è molto laboriosa dal punto di vista computazionale, ed anche per pochi punti la sua gestione real-time diventa praticamente vana specie alle alte frequenze operative.

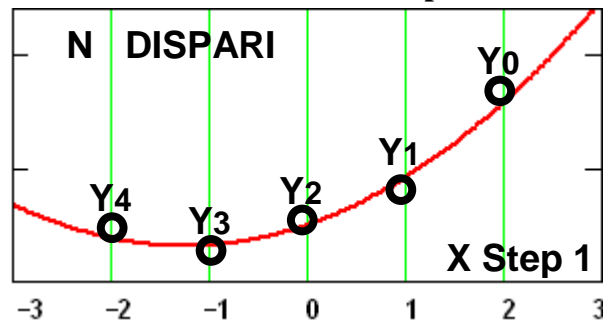
Viste queste controindicazioni, partendo da alcuni studi semplificativi di Baily (1931) e Cox e Matuschak (1941), ed aggiungendo ulteriori semplificazioni e considerazioni innovative, nel 1993 sono riuscito a formulare un metodo che tramite opportuni pesi di un FIR giunge ad una soluzione **esatta** del problema con solo circa una MAC per ogni 2 punti acquisiti, riducendo quindi i calcoli da eseguire in real-time di almeno oltre cento volte rispetto alla soluzione canonica.

Il calcolo (off-line) di alcune costanti viene diversificato in funzione del **Numero dei punti N**



$$K2=3/(N*(N^2 - 1)) \quad K4=15/(4*N*(N^2 - 4))$$

$$K3=K4*(3*N^2-7)/5 \quad K5= N*K2*K4$$



$$K2=12/(N*(N^2 - 1)) \quad K4=15/(N*(N^2 - 4))$$

$$K3=K4*(3*N^2-7)/20 \quad K5= N*K2*K4$$

Ottenute queste costanti, è sufficiente applicare le mie formule per ricavare i parametri della parabola $Y = a + b X + c X^2 \rightarrow a = K3 - K4 * X^2$ $b = K2 * X$ $c = K5 * X^2 - K4$

dove la X è l'ordinata competente ad ogni punto Yn della finestra di osservazione, con le condizioni date nei due grafici, dove **Y0** è il valore del punto attuale (il più recente) e **Y1, Y2 ... YN-1** sono i valori misurati dei punti precedenti (i più vecchi misurati) archiviati in opportuna tabella circolare.

Se i punti vengono considerati come nei due grafici (simmetria rispetto ad X=0) otteniamo i valori di centro finestra: $Y = a + b X + c X^2 = a$, $Y' = b + 2 c X = b$, $Y'' = 2 c$, con un FIR simmetrico. Offsettingo opportunamente i valori delle X è possibile ottenere i valori filtrati di Y e Y' in qualsiasi punto della finestra di osservazione (anche esterno); in questo caso il FIR sarà disimmetrico ma ci consentirà di utilizzare la regressione parabolica anche come Predittore parabolico.

8. Parabola $y = a + b x + c x^2$. La sola y soggetta ad errore. Il procedimento è analogo a quello seguito per il caso della retta. L'equazione di partenza è:

$$y = a + b x + c x^2. \tag{55}$$

Ne segue:

$$\frac{\partial}{\partial a} [\sum (y_0 - a - b x - c x^2)^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial b} [\sum (y_0 - a - b x - c x^2)^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial c} [\sum (y_0 - a - b x - c x^2)^2] = 0 \tag{56}$$

$$a n + b \sum x + c \sum x^2 = \sum y_0$$

$$a \sum x + b \sum x^2 + c \sum x^3 = \sum x y_0$$

$$a \sum x^2 + b \sum x^3 + c \sum x^4 = \sum x^2 y_0 \tag{57}$$

$$a = \frac{\{[\sum x^2 \sum x^4 - (\sum x^3)^2] \sum y_0 - [\sum x x^4 - \sum x^2 \sum x^3] \sum x y_0\}}{\{[\sum x^2 \sum x^4 - (\sum x^3)^2] n - [\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3] \sum x\}}$$

$$b = \frac{\{[\sum x^2 \sum x^3 - \sum x \sum x^4] \sum y_0 - [(\sum x^2)^2 - n \sum x^4] \sum x y_0\}}{\{[\sum x^2 \sum x^4 - (\sum x^3)^2] n - [\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3] \sum x\}}$$

$$c = \frac{\{[\sum x \sum x^3 - (\sum x^2)^2] \sum y_0 - [n \sum x^3 - \sum x \sum x^2] \sum x y_0\}}{\{[\sum x^2 \sum x^4 - (\sum x^3)^2] n - [\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3] \sum x\}}$$

$$\tag{58}$$

Per i più pigri ho calcolato alcuni FIR simmetrici sia per Yc che per la derivata Yc' nel punto Centrale Se qualcuno fosse perplesso o scettico, lo invito a testarli su di una qualsiasi parabola ...

N	K4	K3	WT	WA	WB	WC	WD	WE	WF	WG	WH
3	1	1	1	1	0						
5	0,142857	0,485714	35	17	12	-3					
7	0,047619	0,333333	21	7	6	3	-2				
9	0,021645	0,255411	231	59	54	39	14	-21			
11	0,011655	0,207459	429	89	84	69	44	9	-36		
13	0,006993	0,174825	143	25	24	21	16	9	0	-11	
15	0,004525	0,151131	1105	167	162	147	122	87	42	-13	-78
N	K4	K3	WT	WA	WB	WC	WD	WE	WF	WG	WH
4	0,078125	0,640625	16	9	-1						
6	0,019531	0,394531	32	12	7	-3					
8	0,007813	0,289063	32	9	7	3	-3				
10	0,003906	0,228906	160	36	31	21	6	-14			
12	0,002232	0,189732	112	21	19	15	9	1	-9		
14	0,001395	0,162109	448	72	67	57	42	22	-3	-33	
16	0,000930	0,141555	1344	189	179	159	129	89	39	-21	-91

Il valore di **WT** è il peso totale del FIR, utilizzato per avere **pesi interi e velocizzare i calcoli**.

Esempi di formule esplicite per il calcolo di Yc in funzione degli N punti in finestra:

N = 3 → **Yc = Y1** !!! Inutile utilizzare una Regressione Parabolica su 3 Punti
N = 4 → **Yc = [(Y1+Y2)*9 - (Y0 + Y3)] / 16** (1 MAC)
N = 5 → **Yc = [Y2*17 + (Y1+Y3)*12 - (Y0 + Y4)*3] / 35** (3 MAC)
N = 6 → **Yc = [(Y2+Y3)*12 + (Y1+Y4)*7 - (Y0+Y5)*3] / 32** (3 MAC)
N = 7 → **Yc = [Y3 * 7 + (Y2+Y4)*6 + (Y1+Y5)*3 - (Y0 + Y6)*2] / 21** (4 MAC)
N = 8 → **Yc = [(Y3+Y4)*9 + (Y2+Y5)*7 + (Y1+Y6-Y0-Y7)*3] / 32** (3 MAC)

Per quanto riguarda il calcolo della Derivata nel punto centrale Y'c, il gioco è semplicissimo

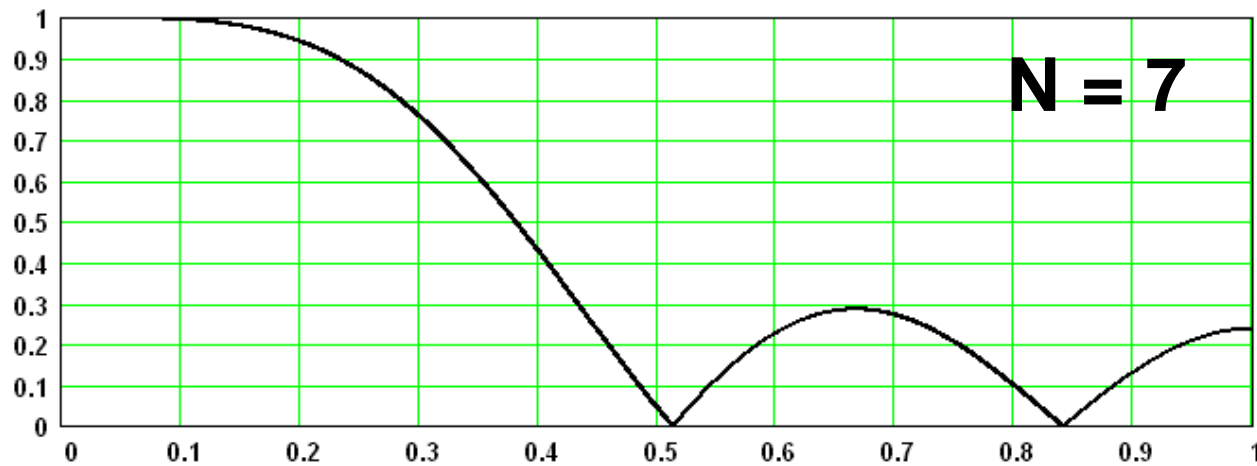
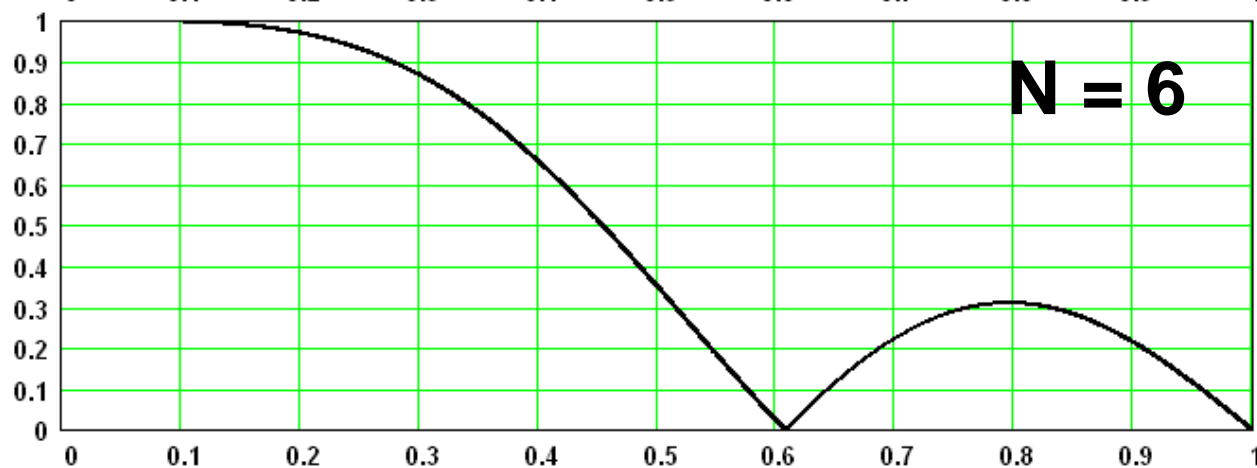
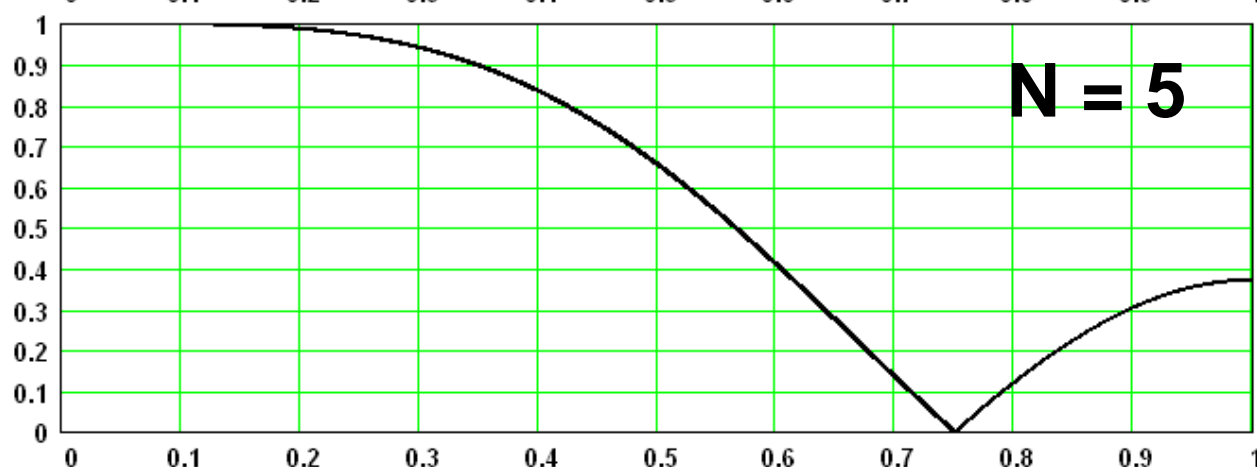
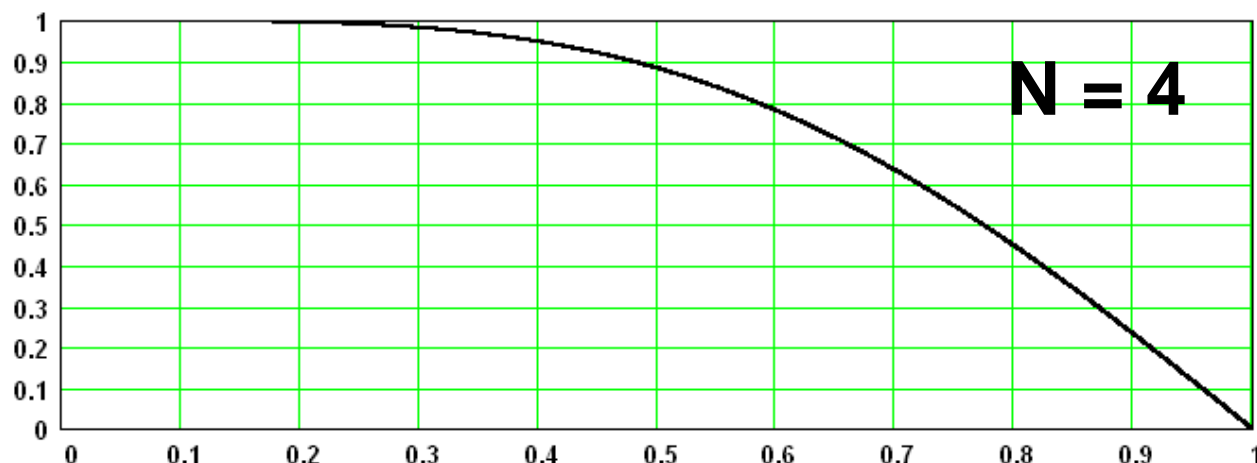
N = 3 → **Y'c = (Y0 - Y2) / 2** !!! Inutile come sopra, ma a volte utilizzabile ...
N = 4 → **Y'c = [(Y0 - Y3) * 3 + (Y1 - Y2)] / 10** (1 MAC)
N = 5 → **Y'c = [(Y0 - Y4) * 2 + (Y1 - Y3)] / 10** (1 MAC)
N = 6 → **Y'c = [(Y0 - Y5) * 5 + (Y1 - Y4) * 3 + (Y2 - Y3)] / 35** (2 MAC)
N = 7 → **Y'c = [(Y0 - Y6) * 3 + (Y1 - Y5) * 2 + (Y2 - Y4)] / 28** (2 MAC)
N = 8 → **Y'c = [(Y0 - Y7) * 7 + (Y1 - Y6) * 5 + (Y2 - Y5) * 3 + (Y3 - Y4)] / 84** (3 MAC)
N = 9 → **Y'c = [(Y0 - Y8) * 4 + (Y1 - Y7) * 3 + (Y2 - Y6) * 2 + (Y3 - Y5)] / 60** (3 MAC)

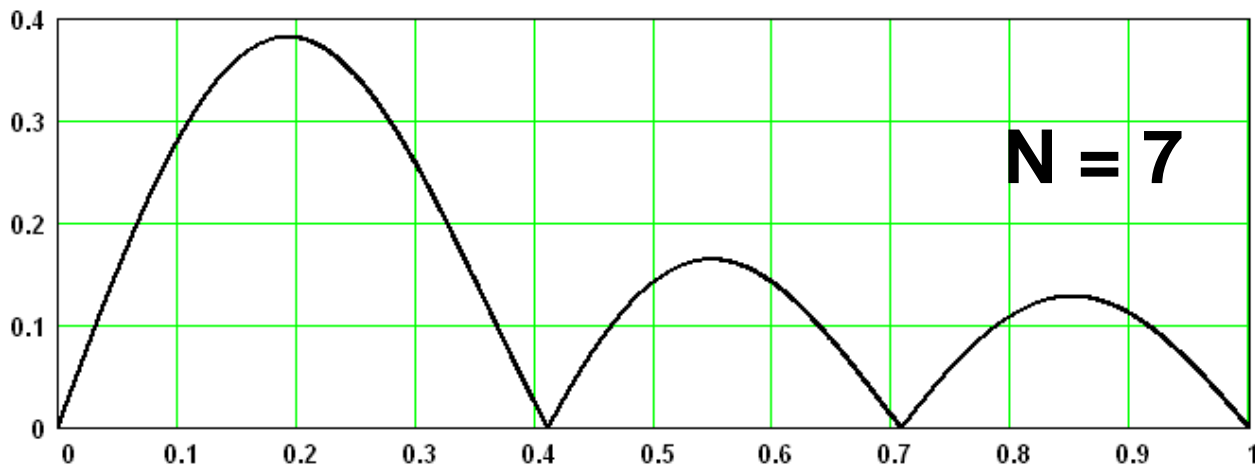
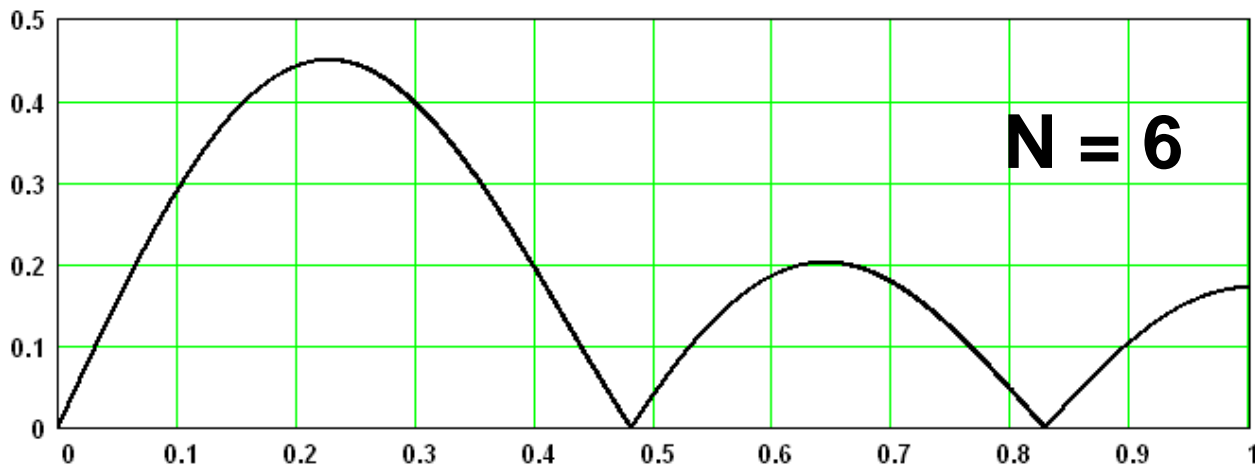
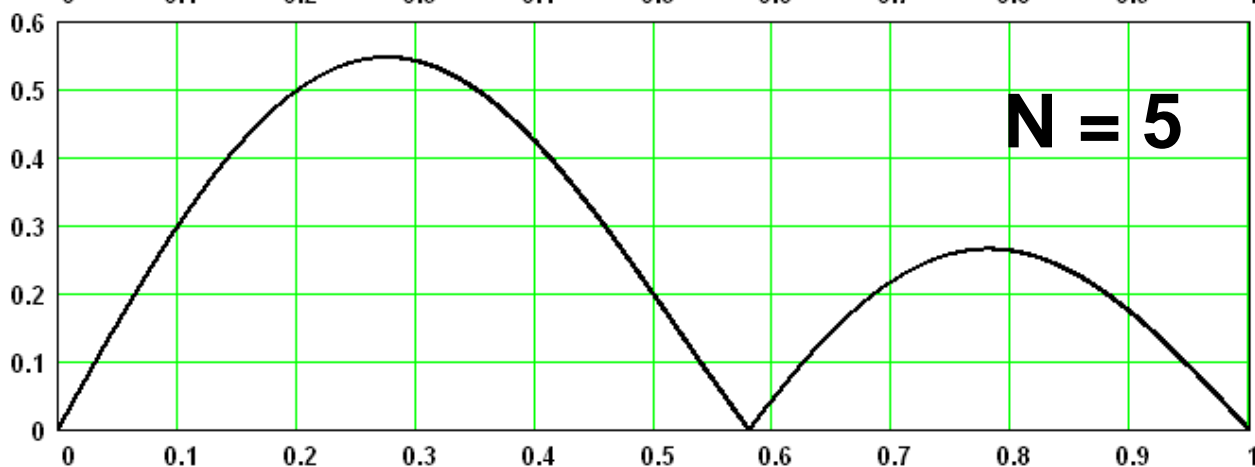
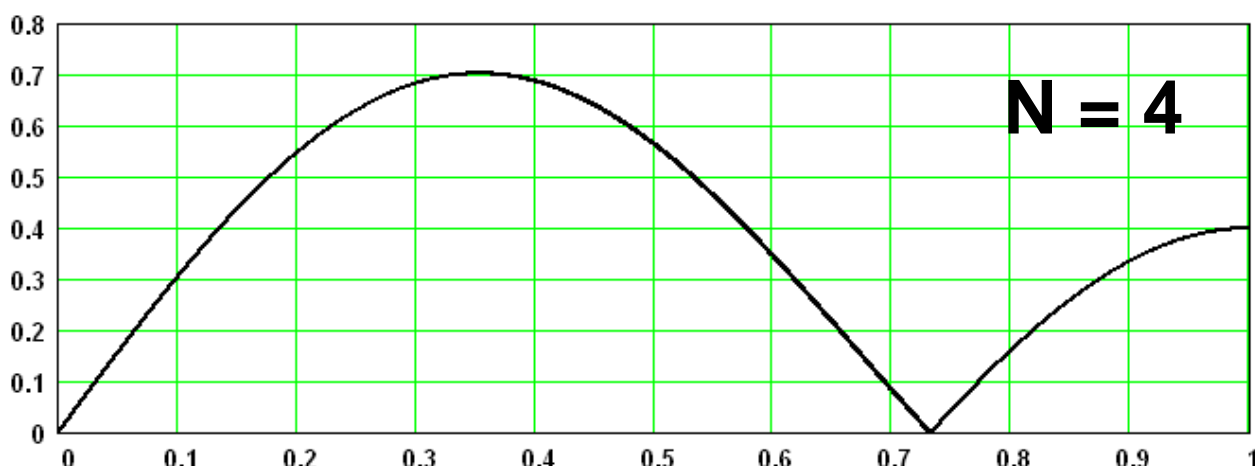
Per un numero di punti superiori si possono usare le formule date nella pagina precedente tenendo conto che Y' = b + 2 c X = b o proseguire nelle relazioni date che seguono una logica lineare avendo l'accortezza di separare i casi con N pari o dispari.

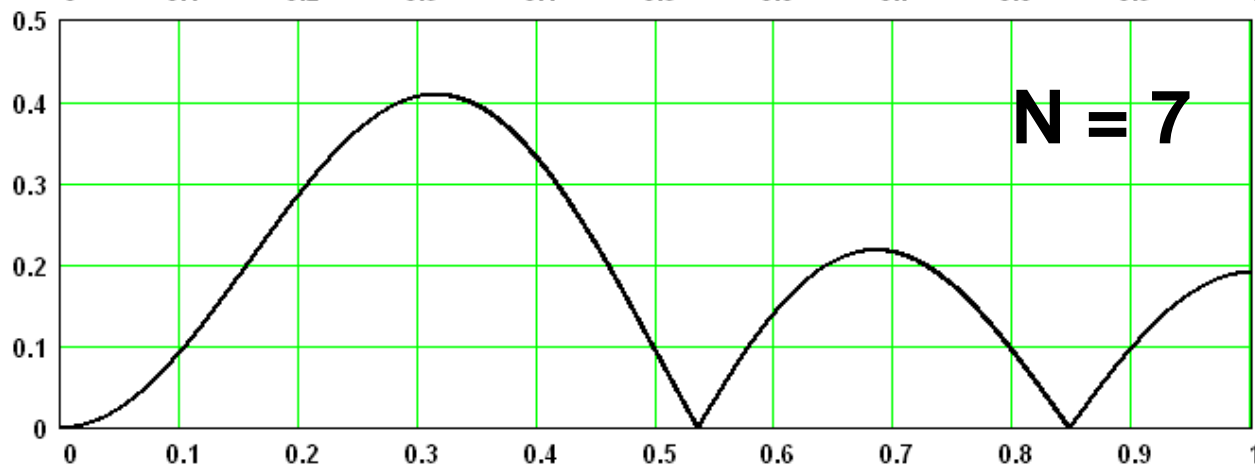
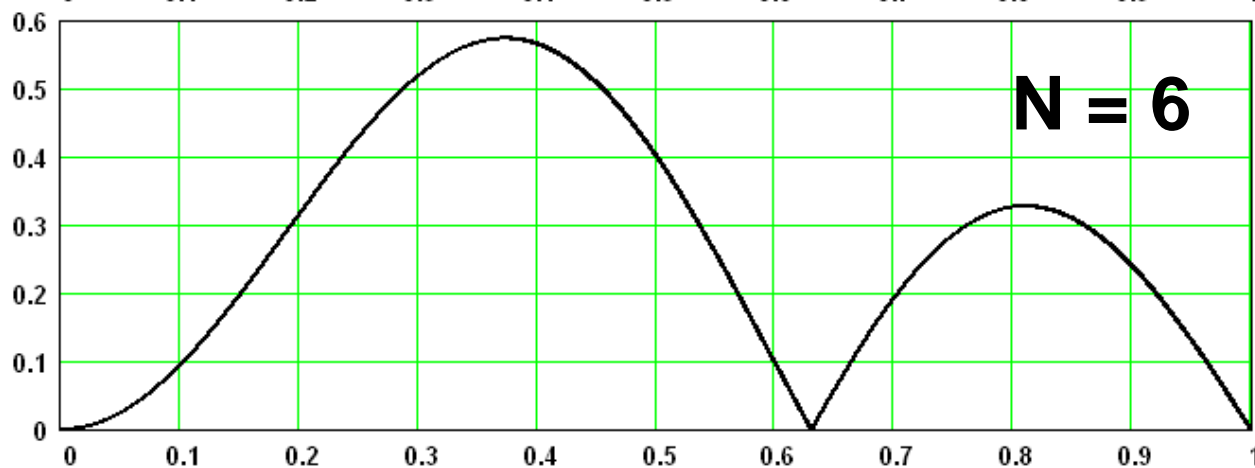
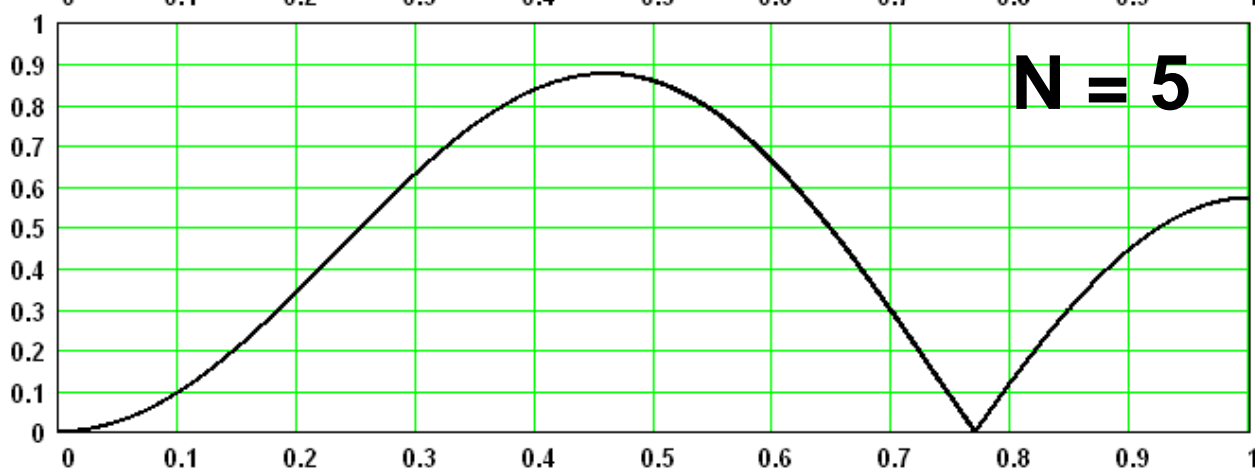
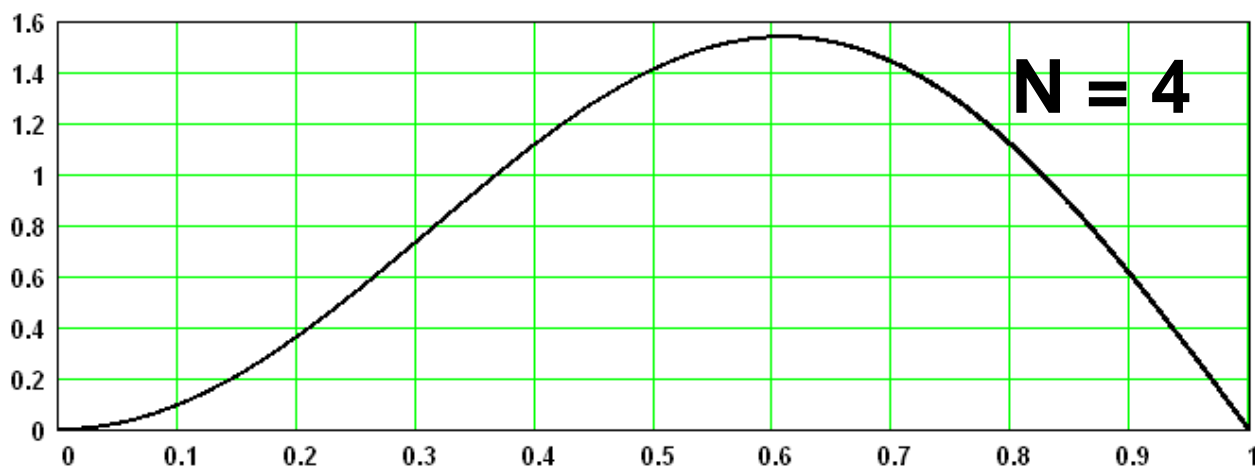
Per quanto riguarda la Derivata Seconda Y'' = 2 c, costante in ogni punto, si può seguire lo stesso metodo; diamo alcuni esempi esplicitati:

N = 3 → **Y'' = Y0 + Y2 - Y1*2** !!! Inutile come sopra, ma a volte utilizzabile ...
N = 4 → **Y'' = [(Y0 + Y3) - (Y1 + Y2)] / 2** (0 MAC)
N = 5 → **Y'' = [(Y0 + Y4 - Y2) * 2 - (Y1 + Y3)] / 7** (1 MAC)
N = 6 → **Y'' = [(Y0 + Y5)*5 - (Y1 + Y4) - (Y2 + Y3)*4] / 28** (2 MAC)
N = 7 → **Y'' = [(Y0 + Y6)*5 - (Y2 + Y4)*3 - Y3 * 4] / 42** (3 MAC)
N = 8 → **Y'' = [(Y0 + Y7)*7 + (Y1 + Y6) - (Y2 + Y5)*3 - (Y3 + Y4)*5] / 84** (3 MAC)

Nelle pagine successive daremo la Risposta in Frequenza di alcuni di questi FIR dove la frequenza normalizzata è la Frequenza di Nyquist Fny, dove Fny = Fc / 2, con Fc frequenza di campionamento.







Abbiamo visto come il calcolo di una Regressione Parabolica possa essere ricondotto al calcolo di semplici FIR. I **FIR** (Finite Impulse Response) sono una categoria di filtri che oltre alla semplicità di calcolo (specie se hanno coefficienti interi) hanno il vantaggio di essere sicuramente stabili dato che operano solamente in Feed-Forward senza alcuna retroazione di Feed-Back.

I FIR sono contraddistinti dalla loro lunghezza N (Taps Number) ed ogni campione acquisito X_i viene moltiplicato per il Peso W_i che gli compete ed accumulato :
$$Y_i = \sum_{i=0}^{N-1} X_i \cdot W_i$$

NB! Per filtri simmetrici basta una sola moltiplicazione ogni due campioni.

Il Ritardo di Gruppo di un FIR è sempre uguale a $N/2$ Tempi di Campionamento T_c .

La Risposta in Frequenza di un FIR è molto semplice da calcolare , dato che basta applicare una FFT ai pesi del FIR , seguiti da molti zeri (zero padding) se si vuole una alta risoluzione ; il modulo della FFT ci darà l'ampiezza in funzione della frequenza mentre l'argomento ($\text{atan}(\text{Im}/\text{Re})$) ci darà l'angolo di fase al variare della frequenza (normalmente ci si riferisce alla Frequenza di Nyquist).

La Risposta all'Impulso di un FIR coincide con la sequenza dei suoi pesi ; da questa tramite processo di integrazione , è facile risalire alla Risposta allo Scalino.

Il calcolo dei pesi di un FIR partendo dalla Risposta in Frequenza voluta è invece un processo abbastanza laborioso e perciò è meglio affidarsi a programmi di calcolo già predisposti allo scopo ; uno dei più usati è SPTOOL di MATLAB (pag. 41) che è anche abbastanza semplice da utilizzare.

Esistono però famiglie di FIR estremamente semplici da progettare e di veloce esecuzione real-time.

FIR MMn è una Media Mobile dei punti acquisti ; in questo caso i pesi sono tutti unitari ed il processo di calcolo si riduce ad una astuta gestione di un Accumulatore da cui prima si sottrae il valore più Vecchio in tabella dati e poi si somma il valore Attuale che viene poi archiviato nella tabella dati ; il peso totale del dato in accumulatore è esattamente N ; la Media mobile agisce come filtro LPF ed alcuni esempi di risposta in frequenza sono dati nella pagina successiva.

NB! Nei grafici che seguono la frequenza è normalizzata alla Frequenza di Nyquist = 1 e l'ampiezza normalizzata a 1. ! La Frequenza di Nyquist è la metà della Frequenza di Campionamento.

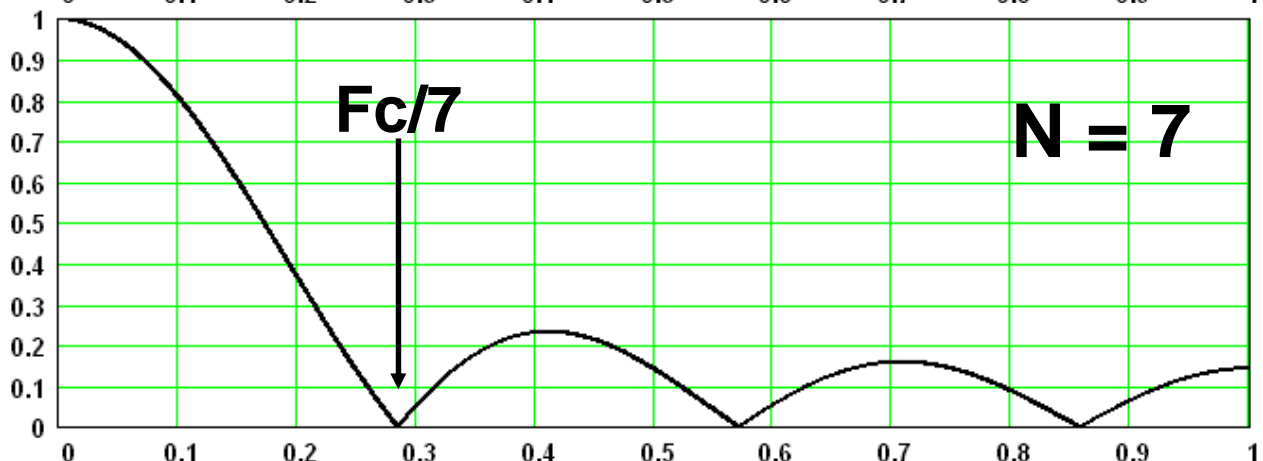
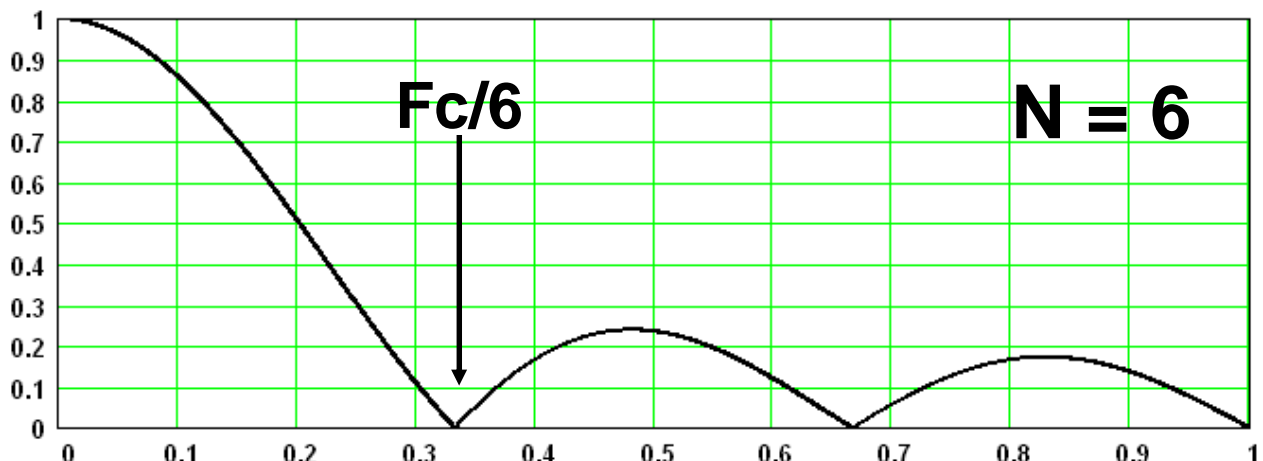
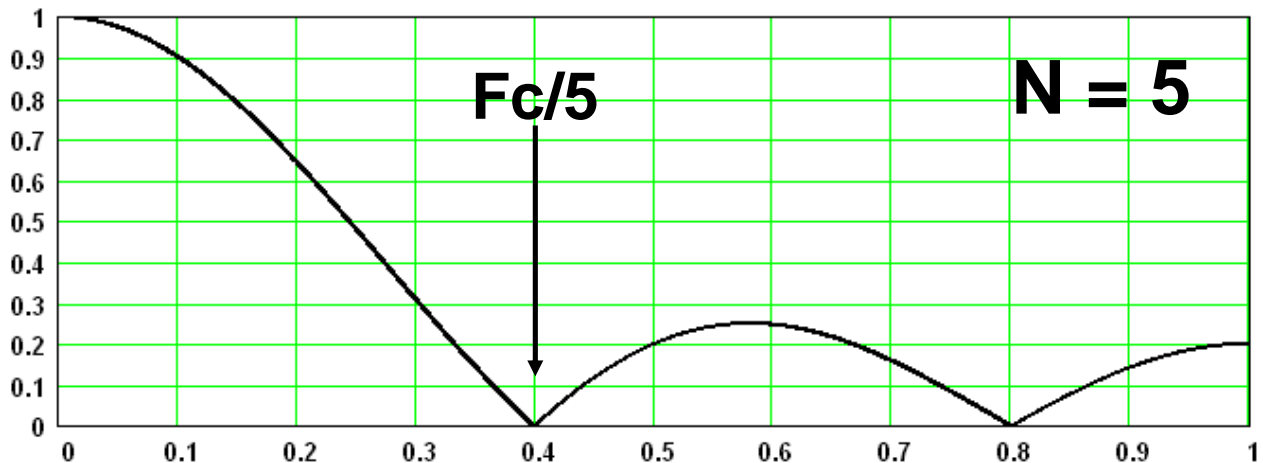
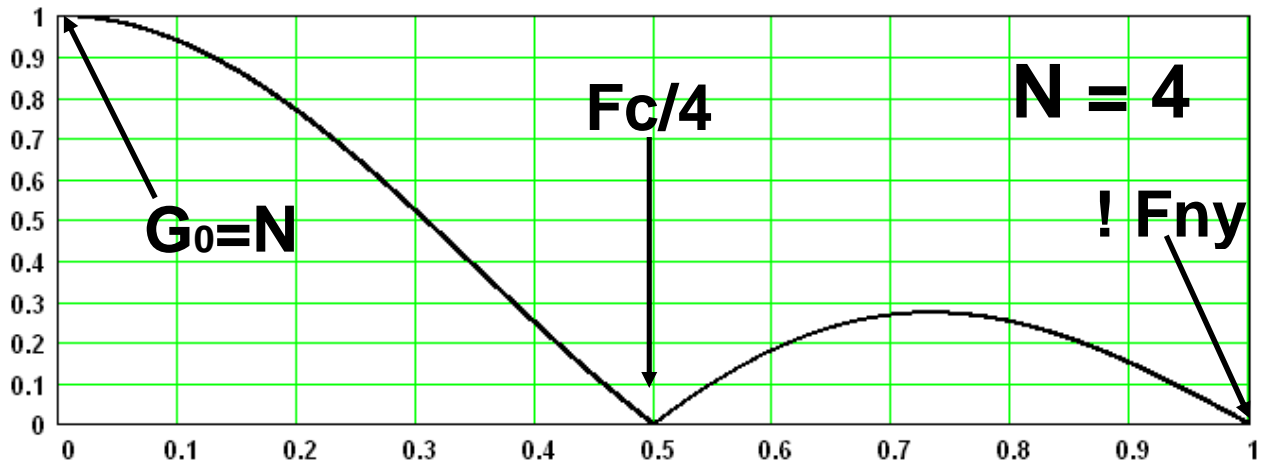
Un FIR MMn di lunghezza N ha il primo lobo di attenuazione $F_c / N = F_{ny} / (N/2)$

FIR COMBO è una semplice somma del campione attuale e del un campione precedente acquisito al Tempo di Campionamento $(N-1) \cdot T_c$; questo FIR (molto usato nei convertitori Sigma-Delta) permette di sopprimere una o più frequenze volute (vedi pag. 37), ed in unione o in cascata ad altri FIR o IIR permette di ottenere i più disparati tipi di Risposta in Frequenza , sia come Ampiezza che Fase.

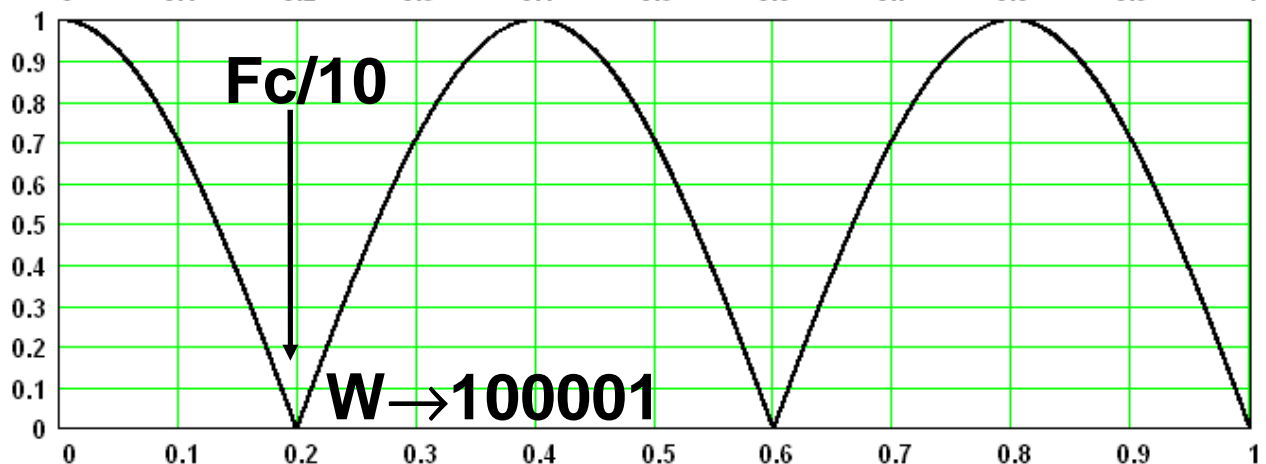
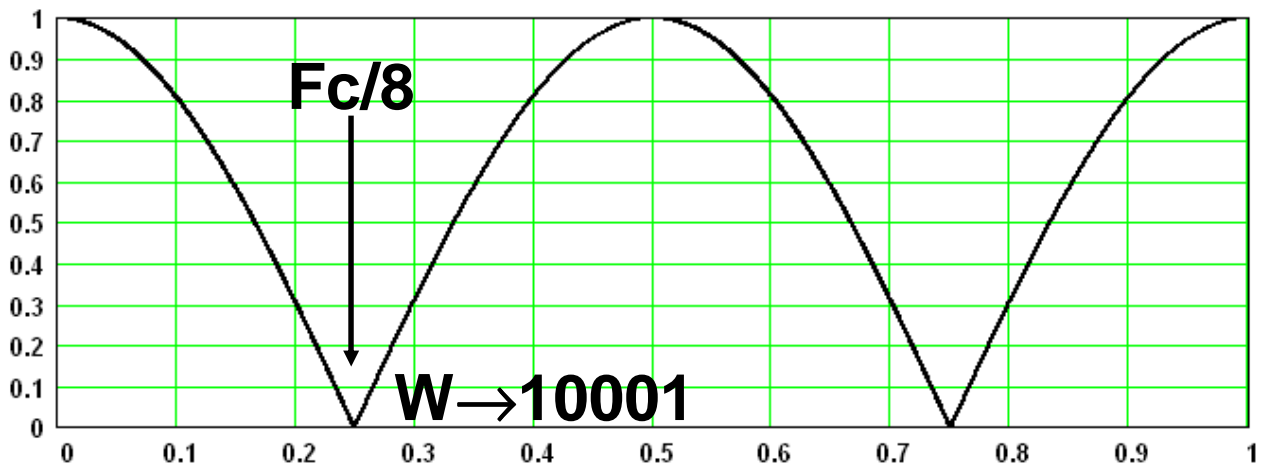
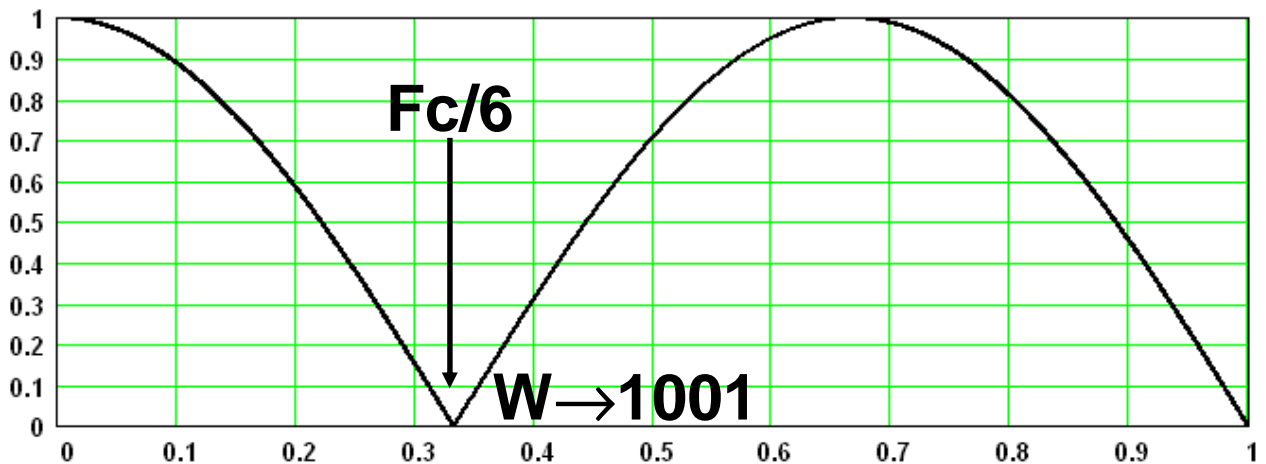
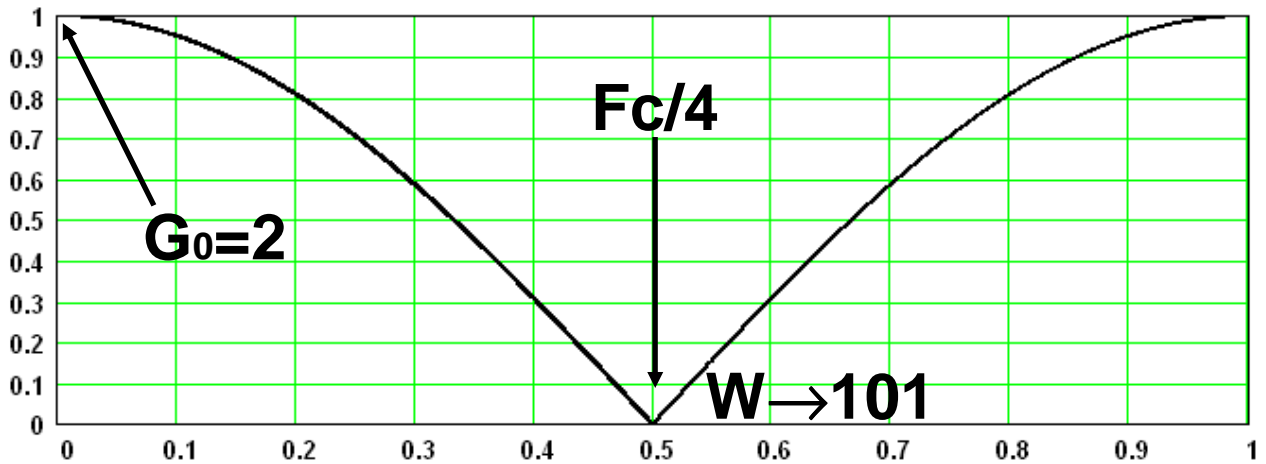
FIR Derivativi è una semplice differenza fra il campione attuale e un campione precedente acquisito al Tempo di Campionamento $(N-1) \cdot T_c$; questo FIR ben si presta al calcolo della Derivata Prima Y' di un segnale (alle basse frequenze) o alla soppressione di una o più frequenze volute (vedi pag. 38)

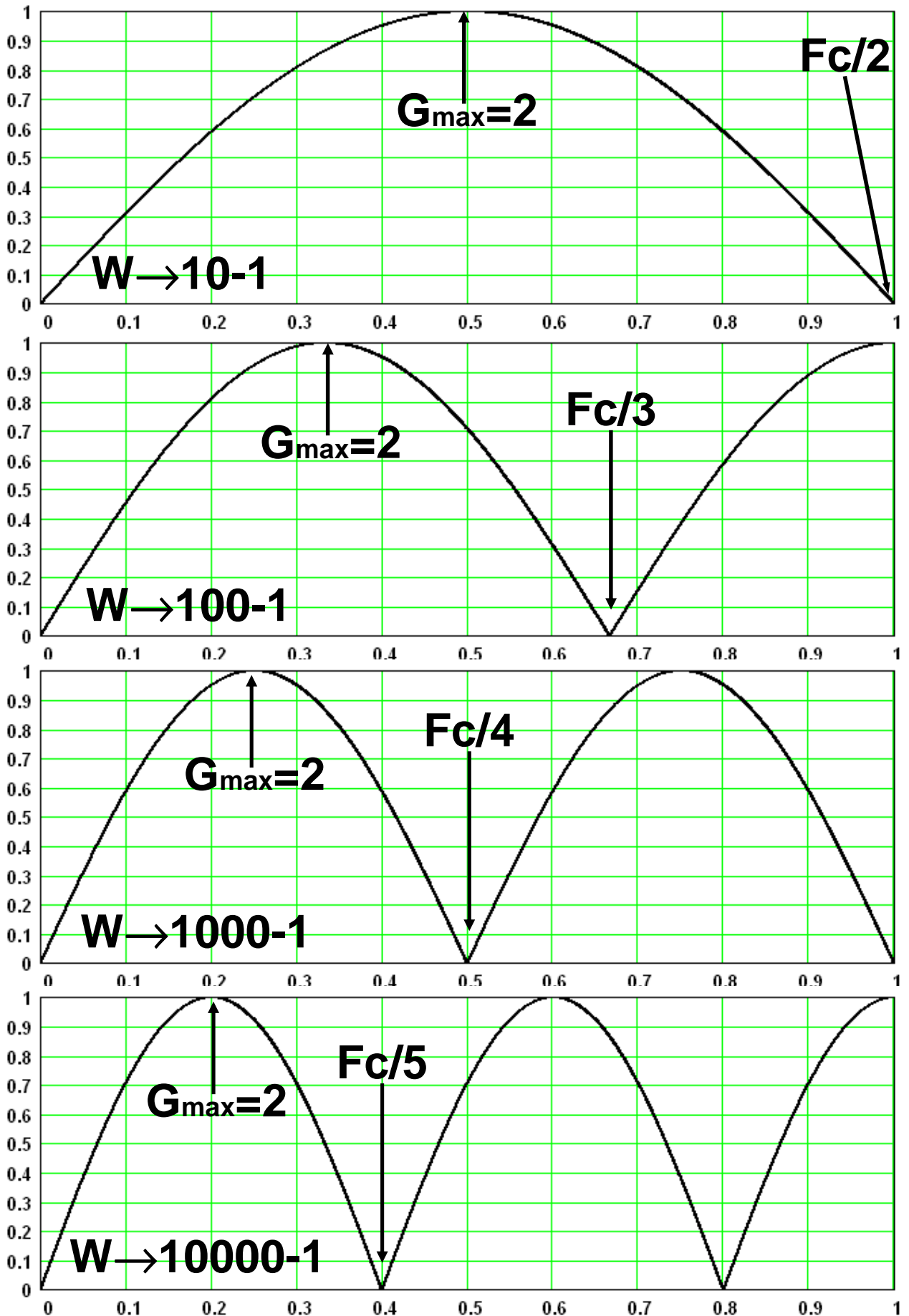
FIR Pseudo SIN approssimano semplici filtri BPF e sono realizzabili tramite solo somme o differenze; negli esempi dati a pag. 39 i pesi sono ottenuti da un campionamento di un Coseno Unitario ogni 90° in modo da ottenere i valori 1 , 0 , -1 , 0 ; all'aumentare del numero di tali sequenze , aumenta la selettività del BPF ; la frequenza centrale può essere variata campionando il Coseno con angoli minori o introducendo sequenze 1 , 0 , 0 , ..., 0 , -1 , 0 con 0 multipli (vedi COMBO).

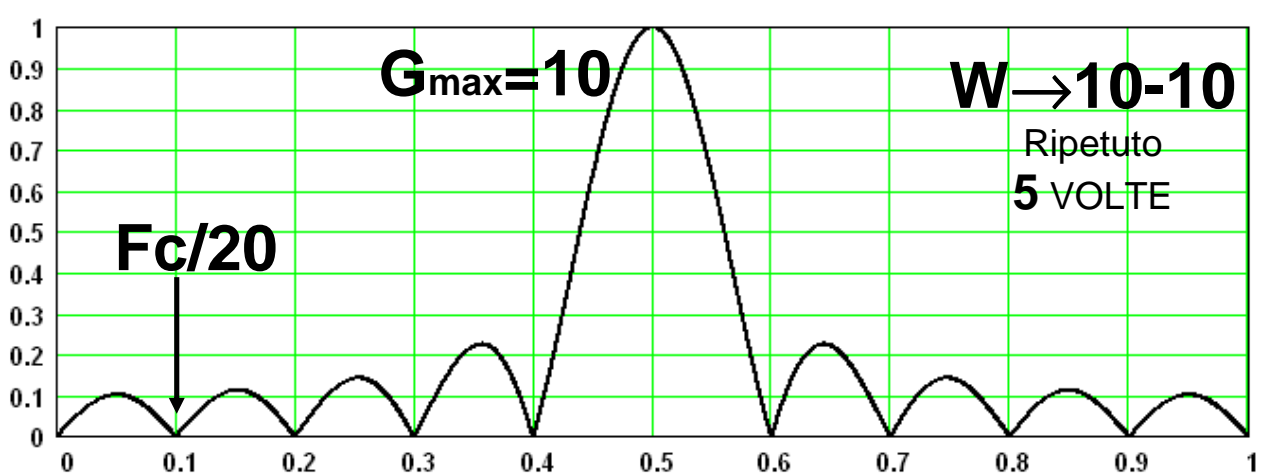
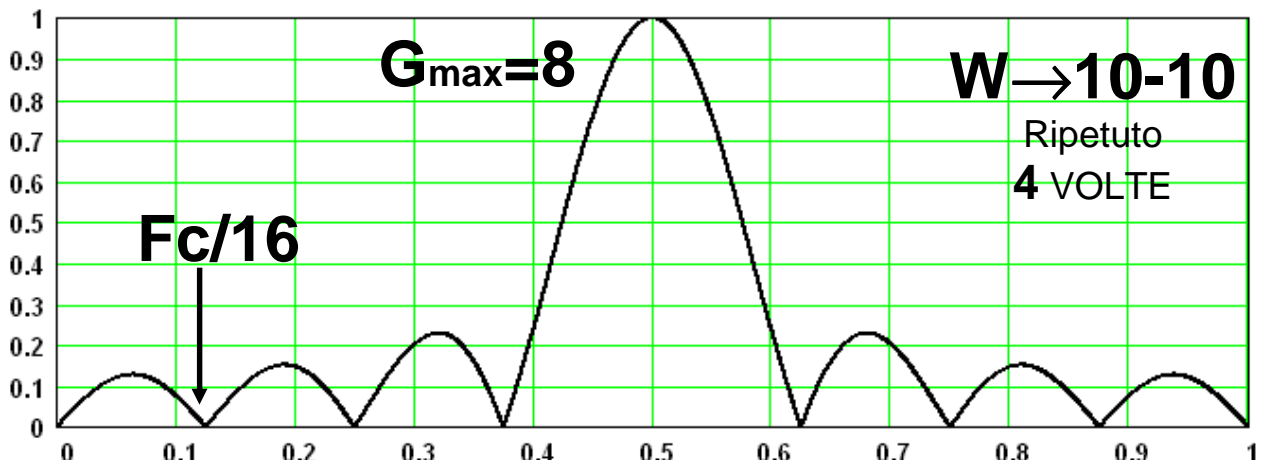
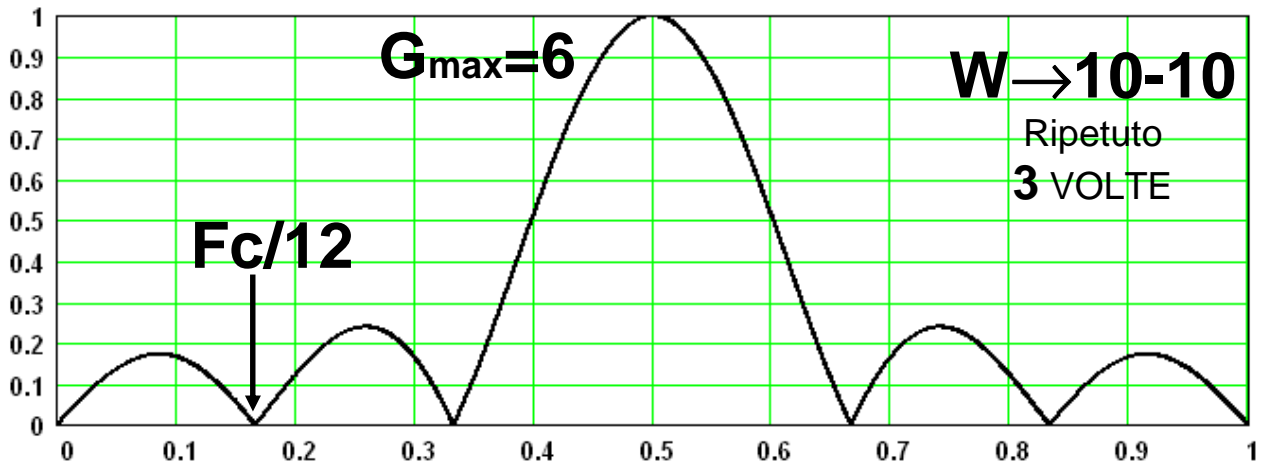
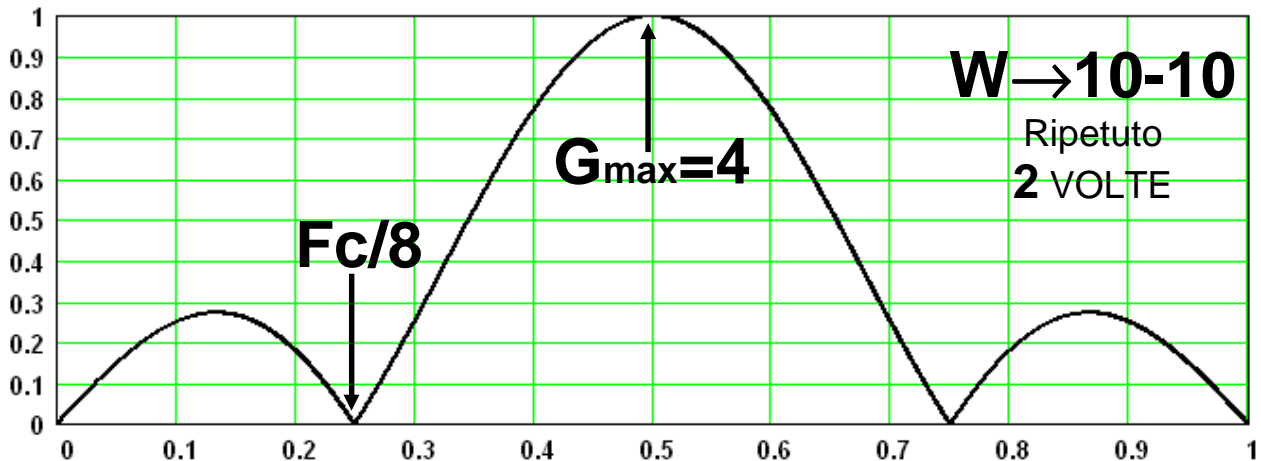
Si possono ottenere buone prestazioni ponendo in **CASCATA** più FIR elementari come ad esempio per le MM in cascata di pag. 40. Ponendo in Cascata un FIR di N_a Taps con uno di N_b Taps otteniamo un FIR equivalente di $N_a + N_b - 1$ Taps con pesi che sono l'uscita di un FIR che ha come ingresso i pesi dell'altro e guadagno totale $W_t = N_a \cdot N_b$.

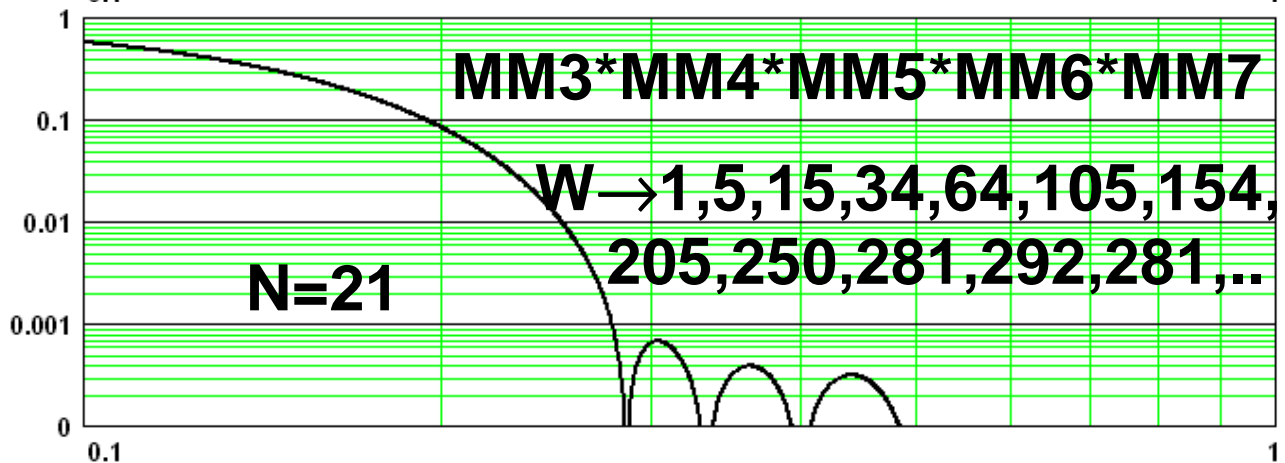
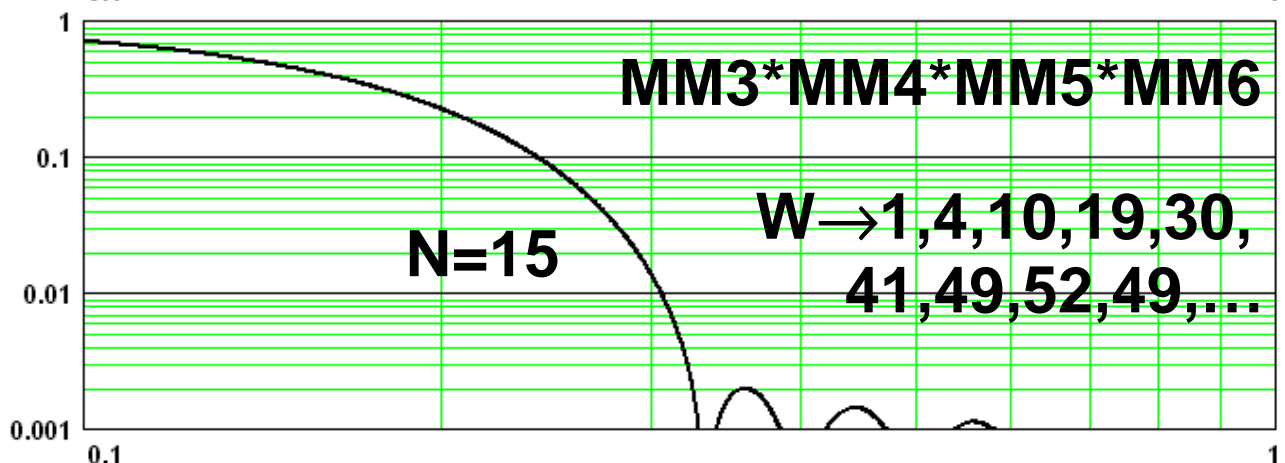
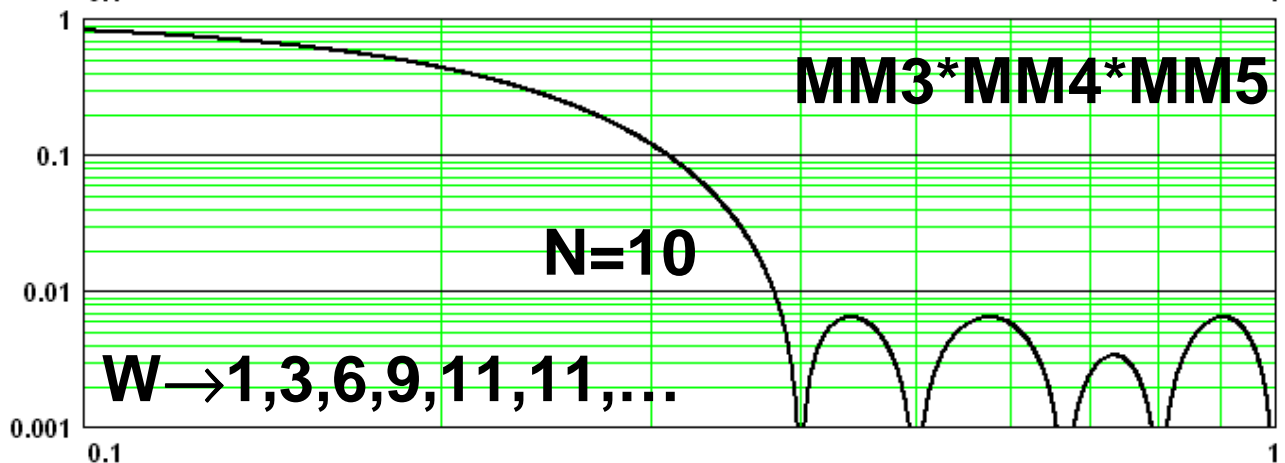
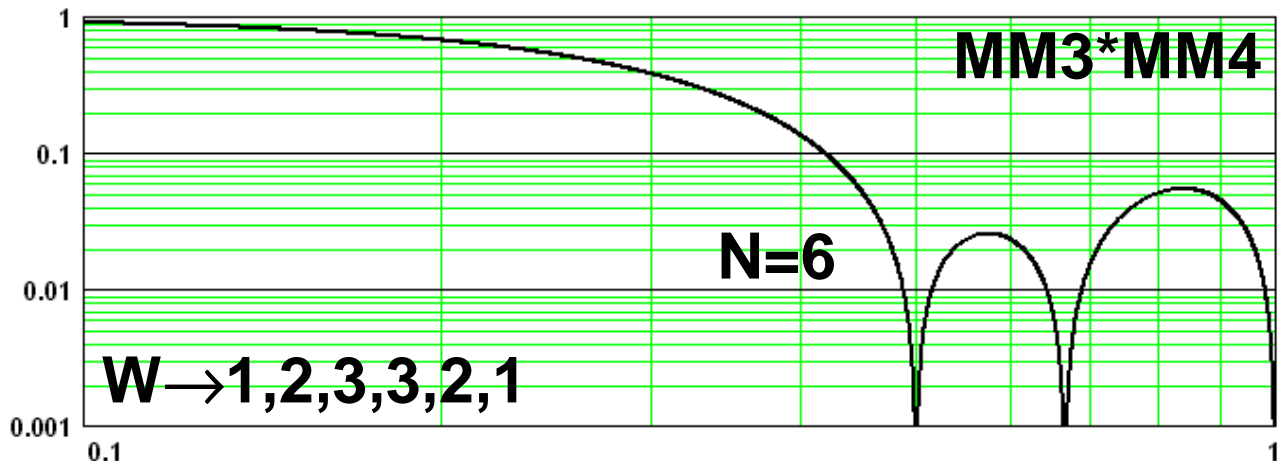


FIR COMBO





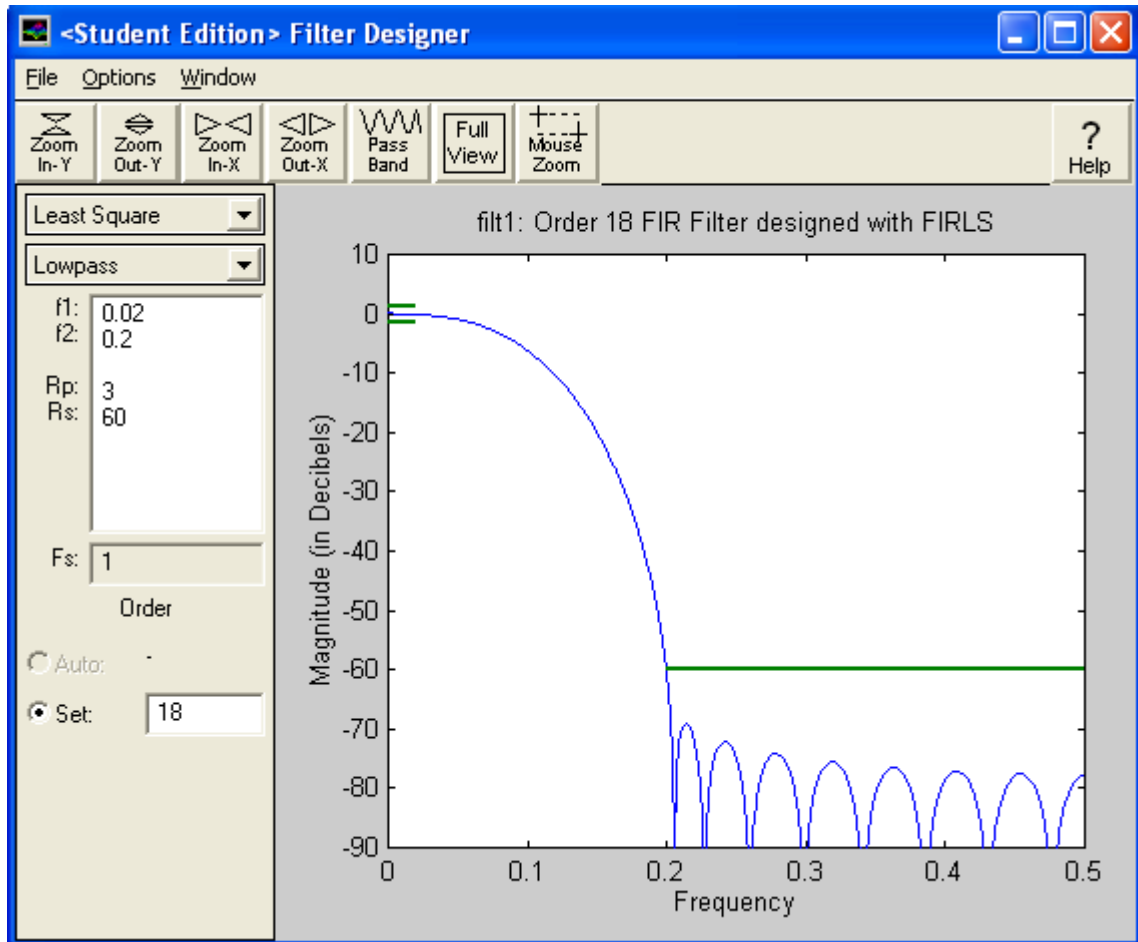




Come già accennato per dedurre i pesi di un FIR partendo da un risposta in frequenza voluta conviene utilizzare **SPTOOL di MATLAB** ; per chi lo usasse per la prima volta, diamo una traccia.

Avviare MATLAB e settare tramite il Browser il Direttorio Corrente voluto.

Avviare **>> SPTOOL** e settare **NEW DESIGN** ed inserire le caratteristiche volute per il Filtro NB!!! In SPTOOL la Frequency è normalizzata a Fc e NON a Fny (!!! Fny = Fc / 2)



Quando le caratteristiche del Filtro saranno quelle volute (ricordando che il filtro sarà simmetrico e con Taps = Order + 1), avviare **FILTER VIEWER** e settare la Risposta all'Impulso (che coincide con i Pesi del FIR); dopo aver selezionato il filtro che interessa (nell'esempio "**filt1**").

Nel menù File di SPTOOL selezionare **EXPORT** e poi **TO WORKSPACE**; a questo punto la variabile strutturata **filt1** conterrà tutte le caratteristiche del nostro Filtro. Per estrarre i pesi del Fir:

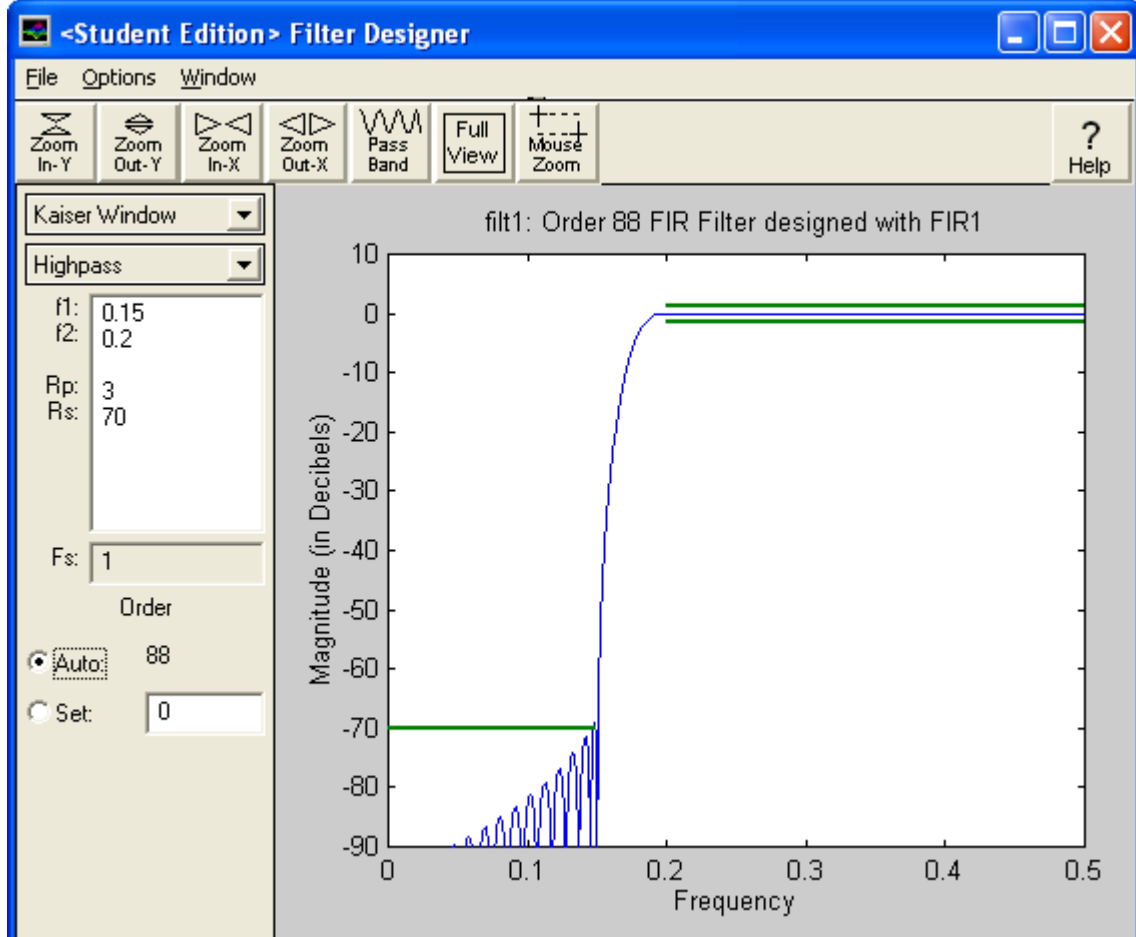
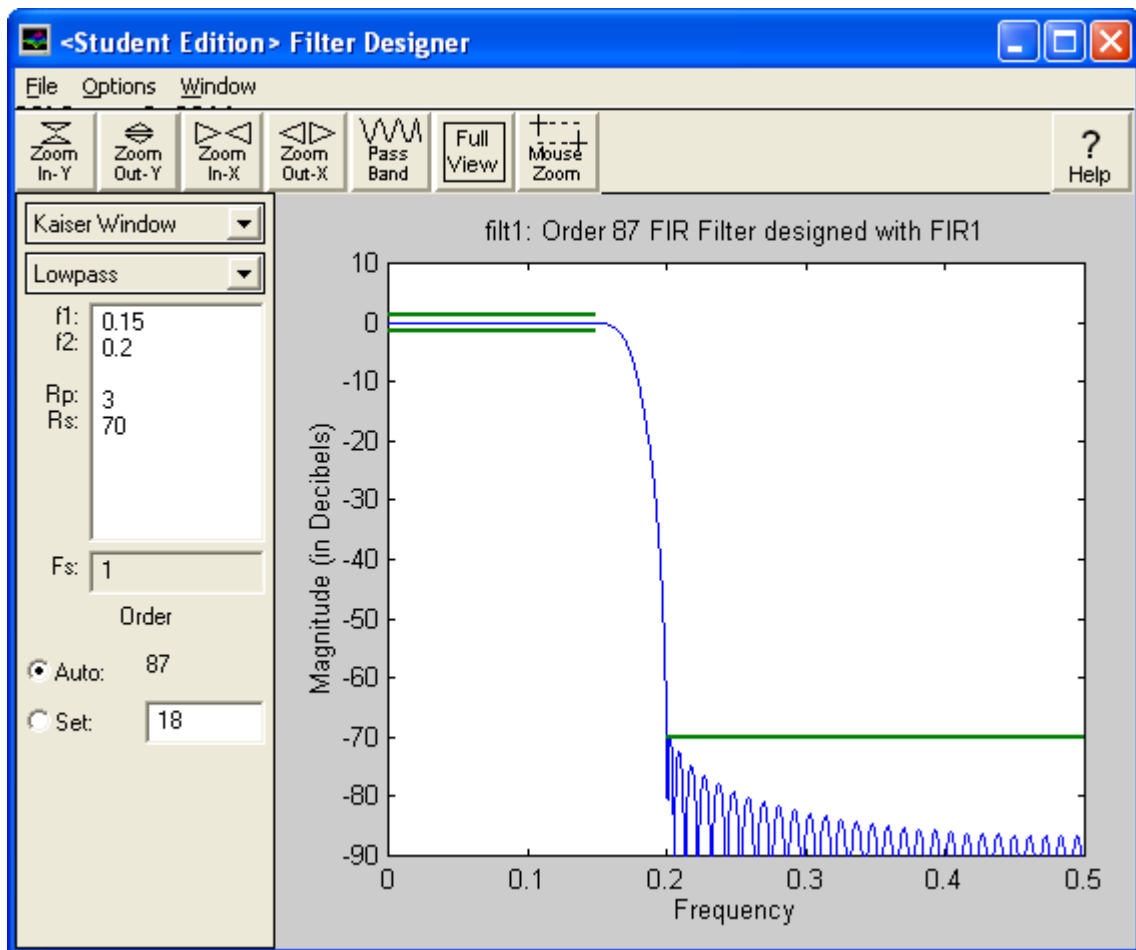
w = filt1.imp (un vettore colonna) **w = w'** (un vettore riga) **save nome.ext w -ascii**

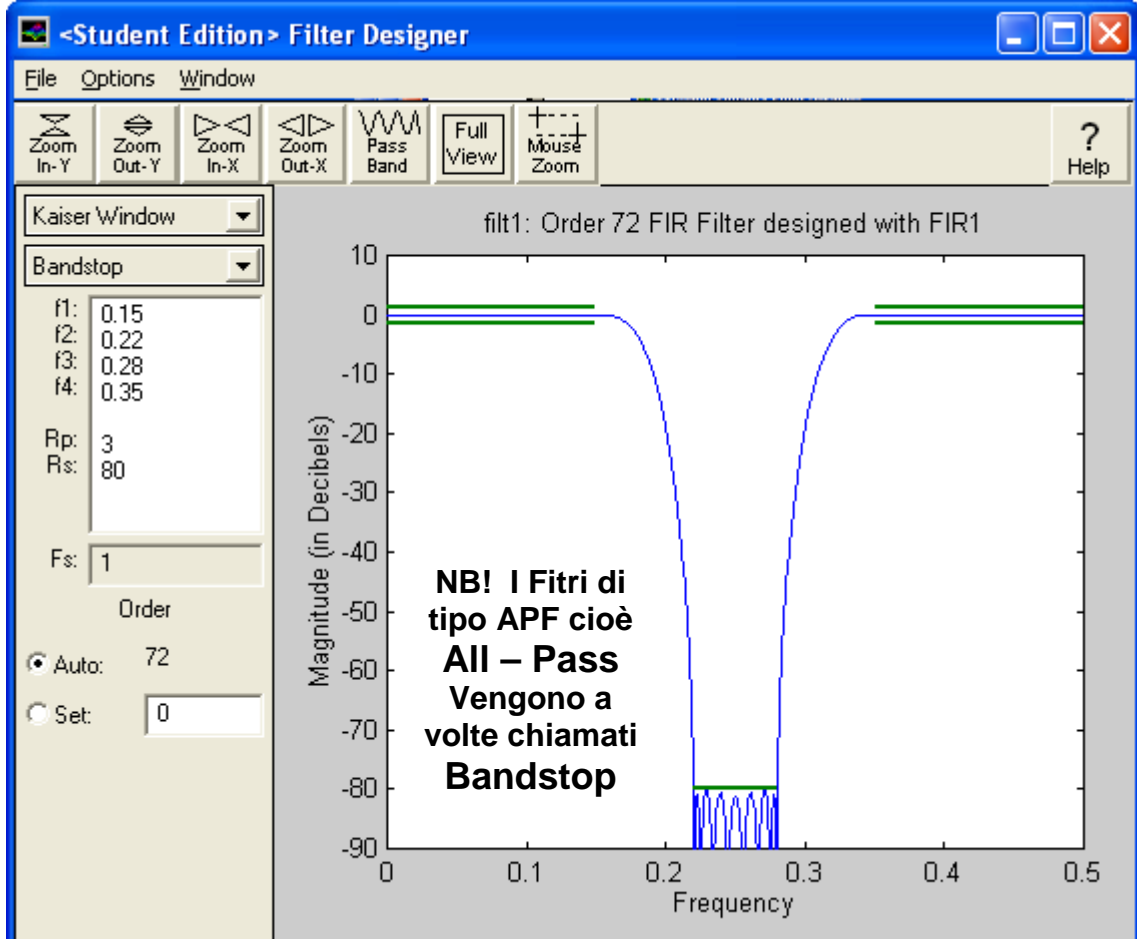
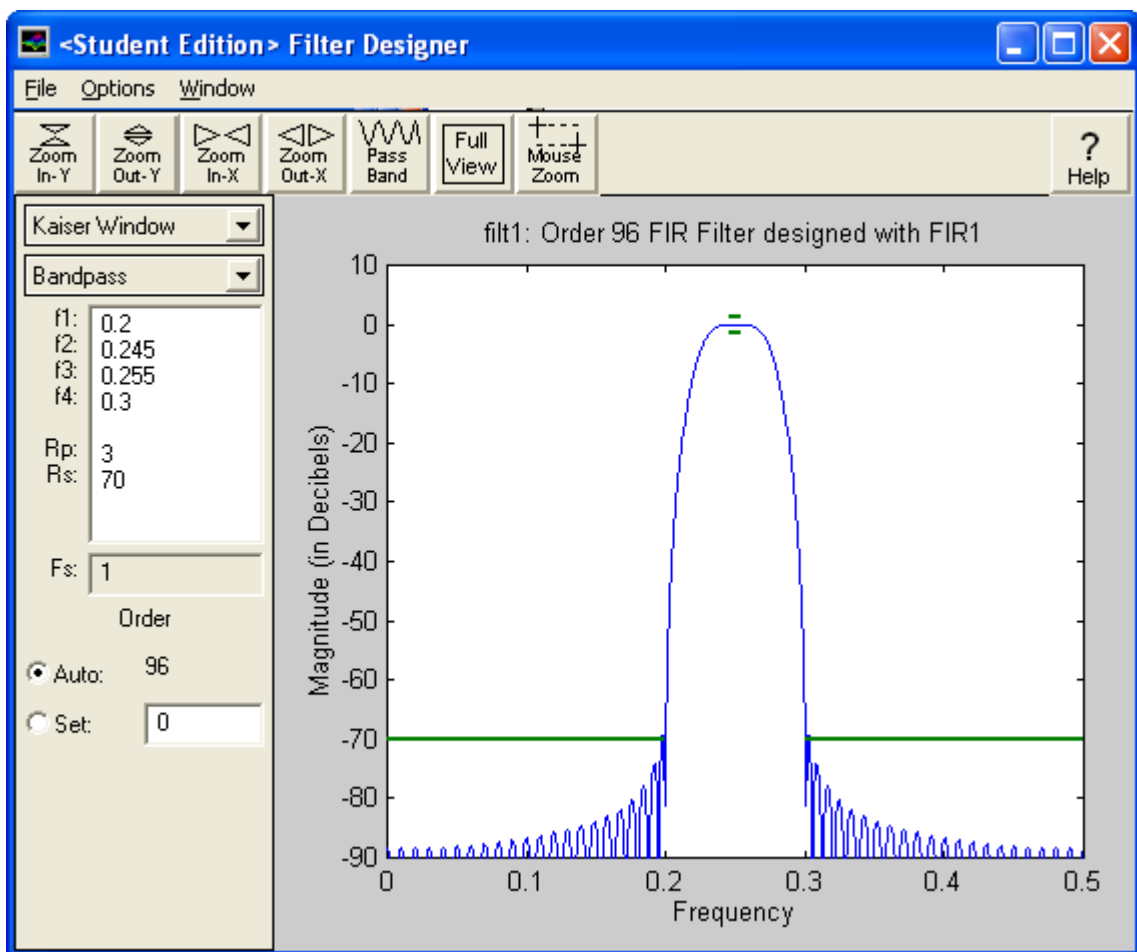
Ecco i pesi salvati nel file ASCII nome.ext :

```
-1.0850275e-003 -4.1840043e-003 -8.4923770e-003 -9.4131174e-003 1.0630054e-003
3.0215501e-002 7.8348500e-002 1.3493916e-001 1.8124178e-001 1.9916741e-001
1.8124178e-001 1.3493916e-001 7.8348500e-002 3.0215501e-002 1.0630054e-003
-9.4131174e-003 -8.4923770e-003 -4.1840043e-003 -1.0850275e-003
```

I pesi sono in Floating Point e si riferiscono ad un guadagno Unitario; se si vogliono utilizzare pesi interi è sufficiente moltiplicare il vettore riga **w** per una costante a piacere (che sarà il guadagno del FIR) ed arrotondare il risultato ad intero; il tutto può essere fatto prima di salvare il file nome.ext.

Nelle pagine seguenti daremo alcuni esempi di filtri FIR di vario tipo ...





Nelle pagine precedenti abbiamo visto diversi Filtri di tipo FIR , ora in questo riassunto ci occuperemo di filtri di tipo Generico con **guadagno statico unitario** le cui funzioni di trasferimento saranno espresse in funzione della variabile complessa s , detta anche operatore di **Laplace** ($s = j \omega$ in regime sinusoidale) .

La nomenclatura seguita è quella classica : LP (Low-Pass) , HP (High-Pass) , BP (Band-Pass) , AP (All-Pass). Risposta in frequenza dell' ampiezza :



Per quanto concerne i filtri del **primo ordine** ne esistono solo due tipi : LP e HP , di formulazione molto semplice.

$LP_1 = \frac{1}{1 + s \cdot \tau}$ $HP_1 = \frac{s \cdot \tau}{1 + s \cdot \tau}$ con questi filtri elementari si ottengono attenuazioni di 6 dB/oct ed in entrambe i casi la frequenza di taglio è a $f_c = 1 / 2 \pi \tau$ con guadagno di -3 dB ($A = 0.707$) e fase di 45°.

Passando ai filtri del **secondo ordine** abbiamo a che fare con due costanti di tempo (spesso complesse e coniugate) e possono essere espresse in una **forma canonica** con una sola costante di tempo associata allo smorzamento ξ .

$$LP_2 = \frac{1}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2} \quad HP_2 = \frac{\tau^2 \cdot s^2}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2} \quad \xi = \frac{1}{2 \cdot Q} \quad Q = \frac{1}{2 \cdot \xi} \quad \omega_c = \frac{1}{\tau}$$

$$BP_2 = \frac{2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2} \quad AP_2 = \frac{1 + \tau^2 \cdot s^2}{1 + 2 \cdot \xi \cdot \tau \cdot s + \tau^2 \cdot s^2} \quad 2 \cdot \xi \cdot \tau = \frac{1}{Q \cdot \omega_c} \quad \tau^2 = \frac{1}{\omega_c^2}$$

Con le relazioni a fianco è possibile passare facilmente nella forma esplicitata mediante Q e ω_c .

Bisogna subito notare che tutti i tipi hanno la stessa equazione caratteristica (quella al denominatore) e quindi è interessante ricordare le seguenti possibili **trasformazioni** valide per qualsiasi ordine n :

$$HP_n = \tau^n \cdot s^n \cdot LP_n \quad BP_n = 1 - LP_n - HP_n \quad AP_n = 1 - BP_n$$

Come prima accennato in un filtro del secondo ordine abbiamo due costanti di tempo τ_L e τ_H che possono essere reali e distinte (per $\xi > 1$) , reali e coincidenti (per $\xi = 1$) o complesse coniugate (per $\xi < 1$) .

Nella forma canonica , la unica τ che appare è la media geometrica di τ_L e τ_H , mentre il termine $2 \xi \tau$ rappresenta la somma delle due costanti di tempo τ_L e τ_H .

Ponendo quindi $\tau = \sqrt{\tau_L \cdot \tau_H}$, $\tau^2 = \tau_L \cdot \tau_H = P$ e $2 \cdot \xi \cdot \tau = \tau_L + \tau_H = S$ otteniamo che i termini P (prodotto delle due costanti di tempo) ed S (somma delle due costanti di tempo) saranno in ogni caso reali.

L'espressione canonica diventa quindi : $LP_2 = \frac{1}{1 + S \cdot s + P \cdot s^2}$

Noti P e S è facile ricavare i parametri della forma canonica per ulteriori analisi : $\tau = \sqrt{P}$ e $\xi = \frac{S}{2 \cdot \tau}$

Se si vogliono ricavare le due costanti di tempo (cosa molto utile se sono reali e distinte , con $\tau_L > \tau_H$) :

$$\tau_L = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4 \cdot P}}{2} \quad \text{e} \quad \tau_H = \frac{P}{\tau_L} \quad \text{con smorzamento} \quad \xi = \frac{S}{2 \cdot \sqrt{P}} \quad (\text{generalmente} > 1)$$

Nel caso che le due costanti di tempo siano reali e distinte , la funzione di trasferimento equivalente è :

$$LP_2 = \frac{1}{(1 + \tau_L) \cdot (1 + \tau_H)} = \frac{1}{1 + (\tau_L + \tau_H) + \tau_L \cdot \tau_H} = \frac{1}{1 + S \cdot s + P \cdot s^2} \quad \text{come volevasi dimostrare.}$$

Per uno studio più approfondito dei filtri e sull'uso della trasformata di Laplace si rimanda a testi specifici , mentre per il nostro scopo di studiare semplici reti di filtraggio consigliamo l'uso di MATHCAD , dove si sostituirà $j \omega = s$, e si potrà ricavare la risposta in frequenza tramite le funzioni complesse $|G(j \omega)|$ e $\arg(G(j \omega))$

EQ. CARATTERISTICA , POLI , STABILITA' , SMORZAMENTO

La risposta allo scalino di una generica funzione di trasferimento è principalmente condizionata dalla **posizione dei poli** nel piano **s** , dove la variabile complessa **s** (operatore di Laplace) è **s = j ω** (!!! solo in regime sinusoidale) ed ha quindi le dimensioni di una **frequenza complessa**.

Anche la posizione degli zeri (radici del numeratore della F.D.T) contribuisce ad alterare i transitori.

I **poli** sono le radici dell' **equazione caratteristica** che è il **denominatore** di una generica F.D.T.

Un criterio molto semplice per determinare la **stabilità assoluta** di un sistema è il seguente :

un sistema è stabile se i suoi poli hanno parte reale NEGATIVA.

Per determinare la **stabilità relativa** si adotta il concetto di **SMORZAMENTO**.

Lo smorzamento (generalmente indicato con ξ) condiziona la risposta al gradino del sistema.

Per ξ negativo il sistema è **assolutamente instabile** e con poli con parte reale positiva

Per $\xi = 0$ abbiamo oscillazioni permanenti ed il sistema è al limite della stabilità assoluta.

Per ξ minore di 1 abbiamo oscillazioni smorzate ed i poli sono complessi coniugati con parte reale neg.

Per $\xi = 1$ (smorzamento critico) non abbiamo più oscillazioni ed i poli sono reali negativi e coincidenti

Per ξ maggiore di 1 si hanno transitori esponenziali molto lunghi ed i poli reali e negativi sono distinti.

In genere per il **minor tempo di assestamento** si sceglie $\xi = 0.707$ (radice di 2 su 2)

Per essere sicuri di **assenza di overshoot** si sceglie $\xi = 1$

L' equazione caratteristica può essere espressa in funzione della posizione dei poli **p** od in funzione delle costanti di tempo ad esse associate **T** ; le due espressioni sono perfettamente equivalenti.

Analizziamo prima una generica funzione di trasferimento del **secondo ordine** con poli (che possono essere reali o complessi coniugati) in posizione **s = - p1** e **s = - p2** :

$$(s + p1) \cdot (s + p2) = 0 \quad s^2 + s \cdot (p1 + p2) + p1 \cdot p2 = 0 \quad \text{posto} \quad a = p1 + p2 \quad b = p1 \cdot p2$$

otteniamo $s^2 + s \cdot a + b = 0$

Per avere $\xi = 1$ dovrà essere : $a^2 = 4 \cdot b$ oppure $b = \frac{a^2}{4}$ oppure $\sqrt{b} = \frac{a}{2}$

Per avere $\xi = 0.707$ dovrà essere : $a^2 = 2 \cdot b$ oppure $b = \frac{a^2}{2}$ oppure $\sqrt{b} = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

Analizziamo ora una generica funzione di trasferimento del **terzo ordine** con poli (che possono essere reali o complessi coniugati) in posizione **s = - p1** e **s = - p2** e **s = - p3** :

$$(s + p1) \cdot (s + p2) \cdot (s + p3) = 0 \quad s^3 + s^2 \cdot (p1 + p2 + p3) + s \cdot (p1 \cdot p2 + p2 \cdot p3 + p3 \cdot p1) + p1 \cdot p2 \cdot p3 = 0$$

otteniamo $s^3 + s^2 \cdot a + s \cdot b + c = 0$

Per avere $\xi = 1$ dovrà essere : $b^3 = 27 \cdot c^2$ $c^2 = \frac{b^3}{27}$ $a^3 = 27 \cdot c$ $c^2 = \frac{a^6}{27 \cdot 27}$

Per cui alla fine $a^2 = 3 \cdot b$ oppure $b = \frac{a^2}{3}$

In genere per F.D.T. del 2° ordine si tende a mettere in evidenza le **costanti di tempo** invece dei poli considerando che **T = - 1 / p** (dato che la posizione di un polo ha le dimensioni di una frequenza).

$$(1 + s \cdot T1) \cdot (1 + s \cdot T2) = 0 \quad 1 + s \cdot (T1 + T2) + s^2 \cdot (T1 \cdot T2) = 0 \quad 1 + s \cdot S + s^2 \cdot P = 0 \quad T = \sqrt{P}$$

Indicando con S la somma delle costanti di tempo e con

T la loro media geometrica si ottiene la forma canonica : $1 + s \cdot 2 \cdot T \cdot \xi + s^2 \cdot T^2 = 0$ $\xi = \frac{S}{2 \cdot T} = \frac{T1 + T2}{2 \cdot \sqrt{T1 \cdot T2}}$

Per $\xi < 1$ le oscillazioni sono a frequenza **f = 1 / (2 π T)**

Per smorzamento unitario le due costanti di tempo sono uguali fra loro e T1 = T2 = T

Per $\xi < 1$ le due costanti di tempo sono positive e $T2 = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4 \cdot P}}{2}$ $T1 = \frac{P}{T2}$ $K = \frac{T2}{T1}$ con $K > 1$

distinte , e supponendo T2 > T1 si calcolano come:

Il problema di determinare i parametri sia statici che dinamici di una generica funzione di trasferimento permette di migliorare moltissimo le prestazioni di un sistema regolato e sotto certe condizioni anche la stabilità relativa.

Le più attuali strategie di regolazione sono di tipo **adattivo** o **self-tuning**, nel senso che monitorando in tempo reale lo stimolo e la risposta del sistema riescono ad aggiustare i loro parametri interni in modo da ottenere risposte ottimali anche se i parametri del sistema variano nel tempo.

Attualmente i sistemi adattivi vengono distinti in due categorie denominate **MRAC** (Model-Reference Adaptive Control) e **STC** (Self-Tuning Control) anche se già si intravede la possibilità di unificare sotto una unica teoria il loro studio.

Un controllo MRAC possiede un modello matematico di riferimento e lo stesso stimolo viene applicato sia al sistema reale che al suo modello matematico ; se l'uscita del modello reale e del modello matematico coincidono vuol dire che il modello è esatto , altrimenti in base all'errore fra le due uscite si agisce sul modello fino a far coincidere le due uscite.

Un controllo STC è composto da un regolatore tradizionale (di un tipo di quelli già visti) e da un identificatore parametrico del sistema reale ; i parametri dedotti dall'identificatore vengono passati al regolatore.

Lo studio di un buon controllore adattivo è in genere abbastanza complesso specie se si vogliono ottenere allo stesso tempo ottime prestazioni dinamiche e statiche e di stabilità relativa ; lo studio di un controllore STC è in genere più semplice di un controllore MRAC a patto di avere un buon identificatore parametrico il cui studio non è però semplicissimo.

Ci pare a questo punto opportuno valutare l'ipotesi di adottare un controllore STC in modo da poter utilizzare i regolatori precedentemente studiati ed al tempo stesso studiare i principi fondamentali di identificazione parametrica che oltre ad essere utilizzati nei controlli adattivi sono utilissimi in molte altre aree applicative.

Su i metodi e la teoria dell'identificazione sono stati scritti moltissimi trattati ma quasi tutti utilizzano un linguaggio matematico ad un livello tale che gran parte degli ingegneri si rifiutano di capire ; cercheremo quindi di semplificare al massimo il problema e di utilizzare un linguaggio alla portata di tutti lasciando in futuro la consultazione dei sacri testi.

Partiamo con un esempio molto semplice supponendo di voler stimare un solo parametro in un sistema lineare. Supponiamo che il nostro sistema sia una pura resistenza R e abbia come ingresso una corrente I e come uscita una tensione V otteniamo una semplice equazione di primo grado $V = R I$ con unica soluzione $R = V / I$; vista la semplicità del problema si sarebbe tentati di identificare il valore di R con una banale divisione , ma cosa succede se $I = 0$ o se la misura di I è affetta da noise ; bisognerebbe quindi effettuare la divisione solo se I ha un valore abbastanza grande e certamente maggiore del valore di picco del noise ed effettuare una successiva operazione di filtraggio.

Supponendo di non conoscere il valore di R possiamo partire con un valore stimato di primo tentativo R_{stim} ed ad ogni istante , dato che possiamo misurare i due segnali I e V possiamo effettuare una valutazione dell'errore di stima come :

$ErrStim_t = V_t - R_{stim_{t-1}} * I_t$; questo errore sarà nullo solo quando il valore della resistenza stimata sarà uguale al valore della resistenza vera e sarà positivo se la stima è stata scarsa o negativo se la stima è stata abbondante.

Appare evidente come sommando al valore stimato precedentemente questo errore moltiplicato per un certo guadagno si ottiene (come avveniva in un semplice controllo proporzionale retroazionato) un valore di resistenza stimata che converge (dopo un transitorio esponenziale se il guadagno non è eccessivo) al valore vero della resistenza.

Questo metodo iterativo può essere riassunto come : **$R_{stim_t} = R_{stim_{t-1}} + ErrStim_t * KGS$** dove KGS viene definito **GUADAGNO di STIMA**.

Valutando i risultati della simulazione , ma anche osservando la formula dell'errore di stima si può notare che non esistono divisioni e che la velocità di aggiornamento aumenta all'aumentare dei segnali di misura ; questo fatto è già di per se un filtro perché il fatto che la stima rallenti per basse correnti o tensioni fa in modo che il rapporto segnale disturbo sia costante (e definibile tramite KGS) e certamente molto inferiore a quello del metodo della semplice divisione.

Già si può immaginare come **sofisticando la retroazione** (qui in pratica è stato usato un semplice P) si possano ottenere risultati di qualità decisamente superiore ed adottando metodi più elaborati si possano stimare più parametri (anche fra loro interdipendenti) in tempi molto brevi e con ottima precisione dinamica se tali parametri variano nel tempo.

In genere la determinazione del guadagno di stima ottimale, che in teoria dovrebbe essere variabile nel tempo in funzione dell'entità dei segnali è abbastanza complessa perché la trattazione sopraesposta è solo una drastica semplificazione del più semplice dei metodi canonici basato sul principio di minimizzare l'integrale degli scarti quadratici.

Come linea guida si può affermare che il guadagno di stima dovrebbe essere grande in presenza di segnali grandi e ridotto al minimo in caso di segnali di stima molto piccoli.

Adottando un guadagno di stima costante i risultati sono accettabili solo se i parametri sono uno o al massimo due; se i parametri da stimare sono più di due bisogna adottare tecniche più sofisticate.

Se si adotta un guadagno di stima costante, questo deve essere abbastanza piccolo per non provocare effetti di instabilità nella stima dei parametri.

Tutti i segnali possono essere preventivamente filtrati ma in questo caso i filtri debbono essere identici per tutti i segnali.

Nei sistemi a più parametri (e quindi a più segnali) si possono riportare in opportuna scala sia i segnali che i guadagni di stima semplicemente moltiplicando i segnali per una costante K_s e la funzione per una costante K_f ; in questo caso i parametri stimati saranno quelli veri moltiplicati per il rapporto K_f / K_s .

E' importante sottolineare che **questi metodi elementari di stima valgono solo per sistemi lineari**; i segnali possono quindi solo essere moltiplicati o divisi per costanti e non sono ammesse altre operazioni non lineari.

La convergenza al valore stimato aumenta all'aumentare del guadagno di stima e con la consistenza dei segnali e del loro stimolo; si dimostra che con N sinusoidi applicate al segnale di ingresso si possono stimare $2N$ parametri.

Sempre considerando il metodo elementare del gradiente semplificato ed il calcolo dell'errore ai minimi quadrati consideriamo un generico sistema con due segnali di ingresso X e Z e con unica uscita Y e con due parametri incogniti A e B costanti o lentamente variabili nel tempo otteniamo l'equazione lineare: $Y = A * X + B * Z$

Per determinare le due incognite ci vogliono almeno due equazioni ma nel nostro caso ne abbiamo a disposizione molte, dato che ad ogni tempo di calcolo ne abbiamo una pronta.

In questo caso l'errore di stima totale è dato da: $ErrStim = Astim * X + Bstim * Z - Y$

Si dimostra che: $Astim_t = Astim_{t-1} - ErrStim_t * X_t * KGSA$
 $Bstim_t = Bstim_{t-1} - ErrStim_t * Z_t * KGSB$

I due guadagni di stima dovrebbero essere in linea teorica dati da una costante divisa per l'integrale esteso ad un certo periodo temporale (con eventuale bounded-gain forgetting) dei valori di ingresso elevati al quadrato, ma se ci si accontenta di una convergenza piuttosto lenta e tranquilla (come in pratica faremo noi) tali guadagni di stima possono essere delle costanti positive sufficientemente piccole.

Rimandando (se necessario) uno studio più approfondito dei metodi di identificazione di più parametri sui sacri testi, ci accontenteremo per ora di identificare due soli parametri.

Per la stima di più di due parametri si ricorre spesso alla notazione matriciale che molto più sintetica; per chi non ne fosse abituato diamo un compendio elementare di tale notazione a pag. 61 - 62

La nostra funzione di trasferimento normalizzata @ T può essere approssimata ad una F.D.T. del primo ordine con **guadagno statico A** ed unica **costante di tempo T** (se con un artificio supponiamo di filtrare l'ingresso X tramite una costante di tempo maggiore di T) che è nel nostro caso la **Costante di Tempo Dominante** del sistema.

Dobbiamo quindi determinare A e T della F.D.T. definita come: $G(s) = \frac{Y}{X} = \frac{A}{1 + s \cdot T}$

Risolvendo rispetto a Y otteniamo: $Y = A \cdot X - s \cdot Y \cdot T$ e sapendo che la derivata prima D dell'uscita Y è proprio $s \cdot Y$, otteniamo: $Y = A \cdot X - T \cdot D$

Abbiamo ottenuto una equazione lineare di primo grado con unica uscita Y e con i due segnali di ingresso X e D a cui sono associati i due parametri A e T da identificare.

Questa equazione è nella forma canonica, ci permetterà quindi di identificare A e T mediante il processo iterativo visto precedentemente.

Per grandezze periodiche di forma qualsiasi si definiscono (relativamente ad un semiperiodo):

Valore Medio **V_m**: Semplice media aritmetica di tutti i valori di un semiperiodo

Valore Efficace **V_{RMS}**: Media quadratica di tutti i valori di un semiperiodo

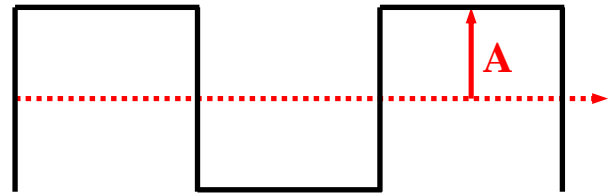
Fattore di Forma: **K_f = V_{RMS} / V_m**

Il Valore Efficace **V_{RMS}** di una tensione (o corrente) di andamento periodico è quel valore che in Corrente Continua produrrebbe in un **resistore puro la stessa energia dissipata.**

SINUSOIDE pura di ampiezza A: **V_{RMS} = A / √2** **V_m = A * 2 / π** **K_f = π / 2 √2 ≈ 1,111**

ONDA QUADRA di ampiezza A: **V_{RMS} = A** **V_m = A** **K_f = 1**

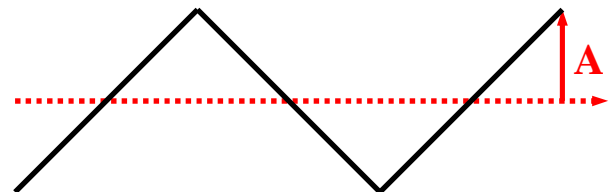
$$A \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin \alpha + \frac{1}{3} \cdot \sin 3\alpha + \frac{1}{5} \cdot \sin 5\alpha + \dots + \frac{1}{N} \cdot \sin N\alpha \right)$$



Dallo sviluppo di Fourier si deduce che la **Fondamentale** ha ampiezza uguale ad **A 4 / π ≈ 1,273**

TRIANGOLARE di ampiezza A: **V_{RMS} = A / √3** **V_m = A / 2** **K_f = 2 / √3 ≈ 1,155**

$$- A \cdot \frac{8}{\pi^2} \cdot \left(\cos \alpha + \frac{1}{3^2} \cdot \cos 3\alpha + \dots + \frac{1}{N^2} \cdot \cos N\alpha \right)$$



Dallo sviluppo di Fourier si deduce che la **Fondamentale** ha ampiezza uguale ad **A 8 / π² ≈ 0,811**

Se le funzioni sono Unipolari mantengono lo stesse Armoniche (! dimezzate) , ma nasce una **componente continua di valore A / 2.**



Per una **SINUSOIDE RADRIZZATA** otteniamo il seguente sviluppo di Fourier :

$$A \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\alpha - \frac{2}{15} \cdot \cos 4\alpha - \dots - \frac{2}{N^2 - 1} \cdot \cos N\alpha \right)$$



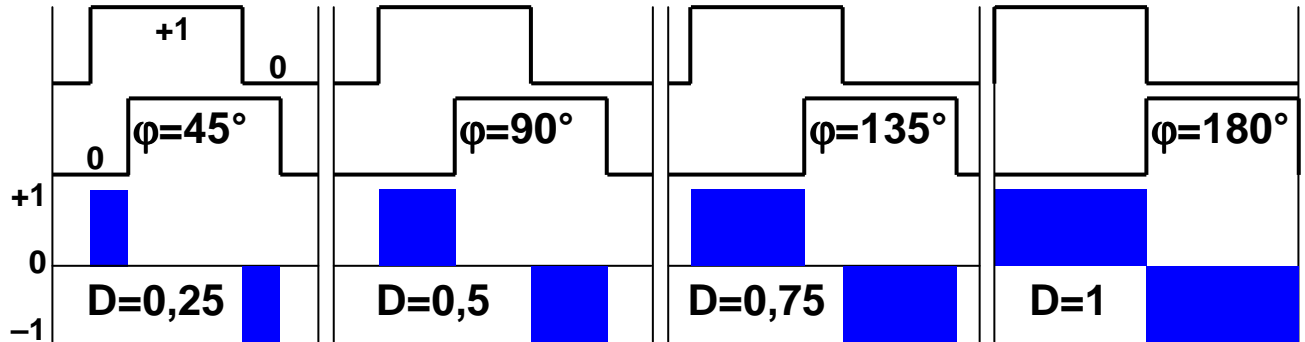
Per una **SINUSOIDE SEMIRADRIZZATA** otteniamo il seguente sviluppo di Fourier :

$$A \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 + \frac{\pi}{2} \sin \alpha + \frac{2}{3} \cos 2\alpha - \dots - \frac{2}{N^2 - 1} \cdot \cos N\alpha \right)$$



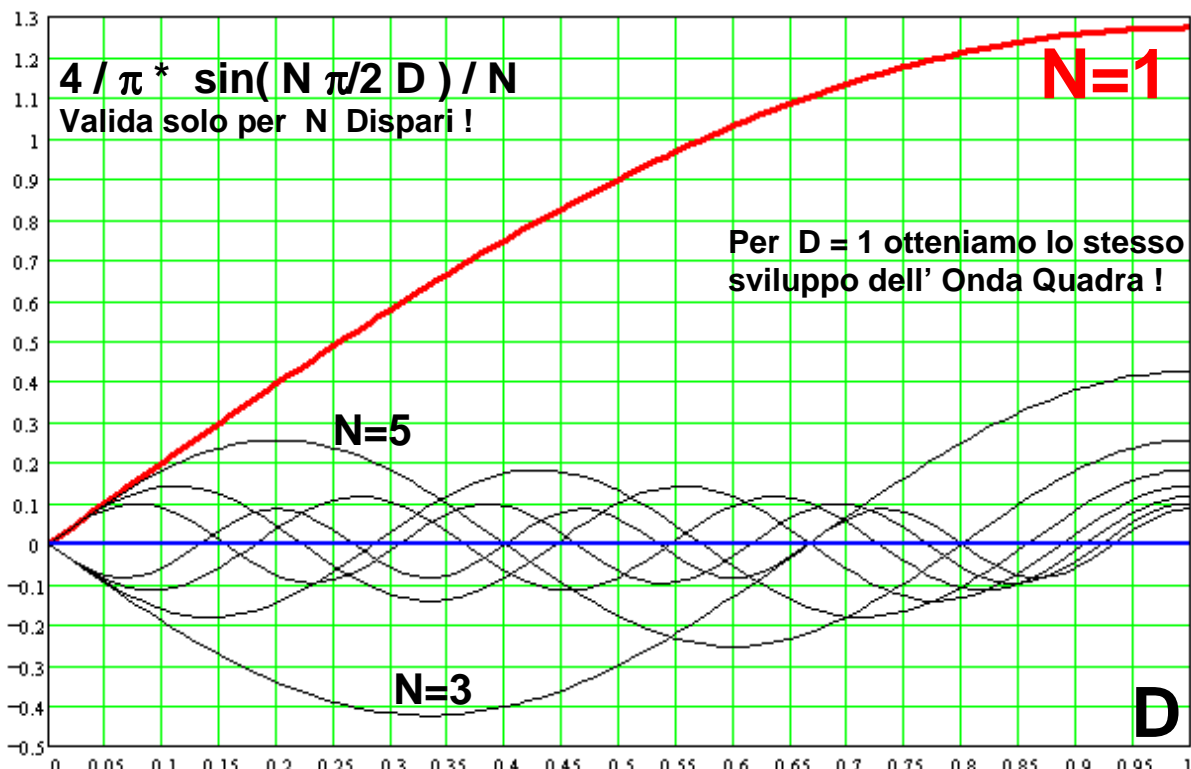
NB! Gli sviluppi dati valgono per $\alpha = \omega t = 0$ per $t=0$; Le funzioni Unipolari continue mantengono lo stesso valore efficace ma , se hanno valore 0 per un semiperiodo, il valore Efficace si dimezza !

Alimentando con un Full-bridge con due tensioni ad Onda Quadra di ampiezza da 0 a +1 e sfasate fra loro di un certo angolo φ un generico carico, otteniamo su questo una tensione che varia fra +1 e -1 che è una onda quadra parzializzata con Duty-cycle $D = \varphi / 180^\circ$; tale tensione avrà un Valore Efficace coincidente con D; consideriamone però lo sviluppo di Fourier per saperne di più.



$$\frac{4}{\pi} \cdot \sum_{N=1}^{\infty} \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(N \cdot \frac{\pi}{2} \cdot D\right) \cdot \frac{\sin(N\alpha)}{N}$$

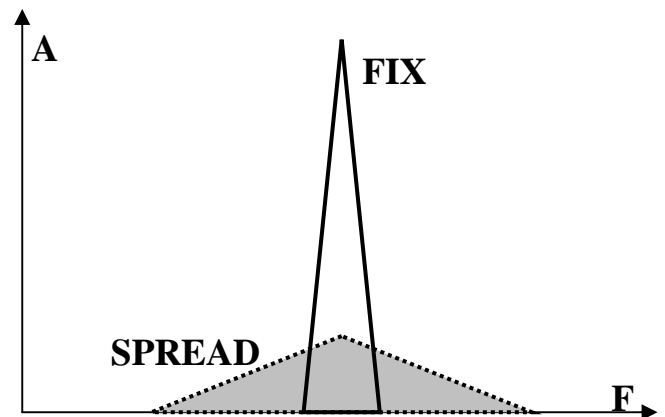
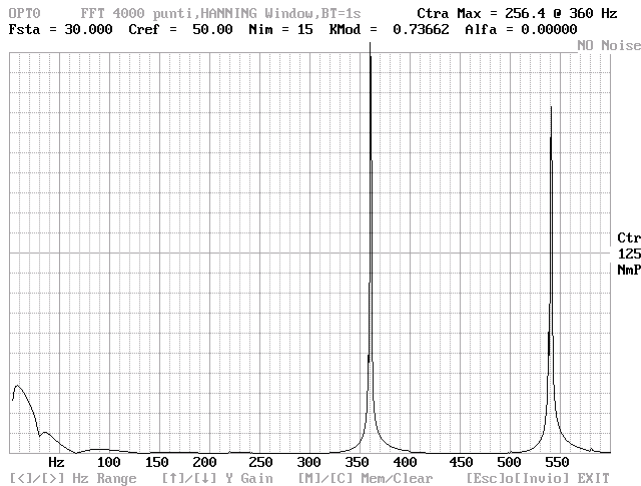
il guadagno iniziale $4 / \pi$ e l'ultimo termine coincidono con lo sviluppo dell'onda quadra; il primo termine $\sin(N \pi/2)$ è 0 per N pari (esistono quindi solo le armoniche dispari, per la simmetria del ciclo) ed assume valore +1 per $N = 1, 5, 9 \dots$ e valore -1 per $N = 3, 7, 11 \dots$, mentre il termine intermedio $\sin(N \pi/2 D)$ condiziona il valore di ogni armonica di ordine N in funzione di D, come riportato nel grafico qui sotto.



In pratica al variare di D fra 0 e 1, ogni armonica dispari compie $N / 4$ cicli sinusoidali di ampiezza $4 / (\pi N)$.

Questa modulazione detta anche Phase-Shift Mod. è utilizzata anche per azionamenti di media e grande potenza in quanto molto semplice da realizzare e controllare.

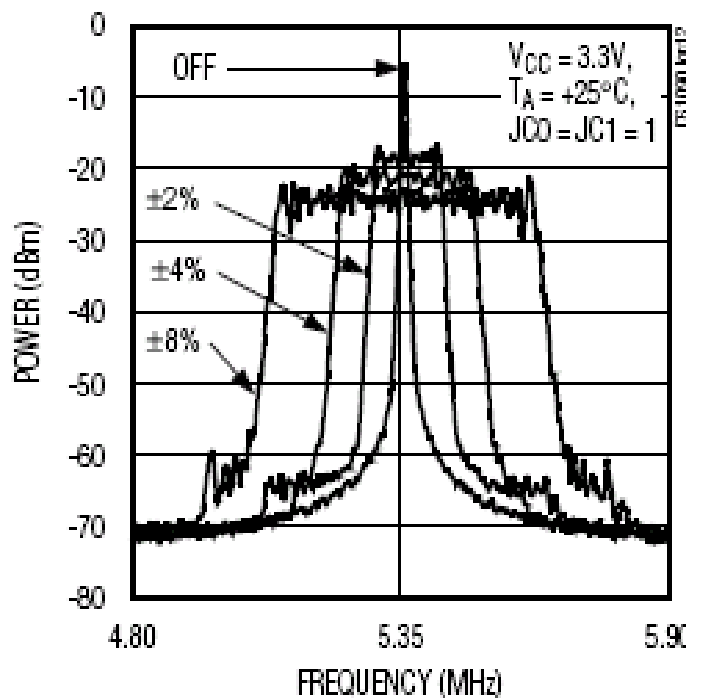
Permette di passare dal dominio del **Tempo** al dominio delle **Frequenze** e viceversa. Attualmente si adotta per l'analisi spettrale, la versione discreta **DFT** generalmente ottimizzata in velocità di calcolo in **FFT**. In base al numero di righe **Nr** volute si campionano **2 Nr** punti temporali reali (o **Nr** complessi) in una finestra temporale **Tw** che definisce la risoluzione di riga **Rr = 1 / Tw** ; la massima frequenza analizzabile **Fmax** dipende dal tempo di campionamento **Tc** :
Fmax = 1 / 2 Tc = Fc / 2 = Fny (Frequenza di Nyquist)



Anche se ormai gli algoritmi per FFT sono molto ben conosciuti e presenti già pronti in tutti i tools di calcolo e spesso implementati in firmware, il loro uso corretto richiede una lunga e buona esperienza e la conoscenza di tutte le problematiche collaterali (windowing, image, lobi spuri, ecc.) e spesso i neofiti che usano questi tools prendono lucciole per lanterne. La DFT viene utilizzata anche in real-time nei controlli per la identificazione e successiva riduzione delle armoniche.

Sono sempre più diffuse le tecniche di **SPREAD SPECTRUM** che modulando (con una funzione piatta nel piano delle probabilità) il master clock di un sistema permettono di distribuire l'energia totale di una armonica su più righe di frequenza in modo che l'ampiezza massima centrale sia drasticamente ridotta come è possibile vedere nei grafici di destra. Bisogna notare che nello schizzo in alto a destra le scale di ampiezza e sono entrambe lineari e si può quindi notare la conservazione dell'area ; questo fatto non è rivelabile ad occhio nel grafico qui a destra dato che le ampiezze sono in dB e seguono quindi un andamento logaritmico. Bisogna inoltre notare che lo spreading è riferito alla fondamentale mentre per le armoniche di ordine superiore lo sprading aumenta proporzionalmente all'ordine di armonicità.

POWER SPECTRUM vs. SPREAD



Lo Spreading non è un puro e semplice trucco per passare facilmente le prove di omologazione, ma un vero e proprio riduttore del rischio che certe armoniche possano disturbare altri dispositivi, dato che questo rischio è proporzionale al valore massimo dell'armonica e non al suo contenuto energetico.

Riportiamo , per utilità , alcune formulette e metodi per lo studio dei circuiti elettrici elementari.

Un circuito elettrico è composto da **MAGLIE** e **NODI** ; è sempre **NULLA la SOMMA** : delle **CORRENTI** entranti in un **NODO** e delle **TENSIONI** (in senso ciclico) delle **MAGLIE**

Due circuiti sono perfettamente EQUIVALENTI se contemporaneamente hanno la stessa identica :

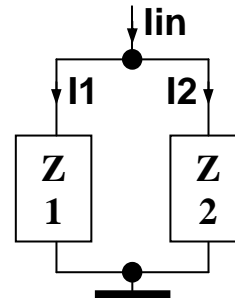
TENSIONE a VUOTO & CORRENTE di CORTOCIRCUITO

Serie di Z_1 & $Z_2 = Z_1 + Z_2$ Paralelo di Z_1 & $Z_2 = Z_1 * Z_2 / (Z_1 + Z_2) = Z_1 \parallel Z_2$

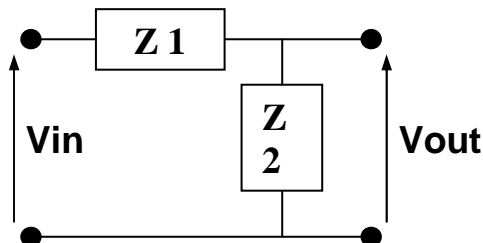
Per la serie di più Z basta fare la somma di tutte le Z , mentre per il parallelo di più Z e conveniente calcolale le loro inverse $Y = 1 / Z$ (ammettenze) , sommarle fra loro e calcolare l'inverso del risultato.

Circuito **PARTITORE** di **CORRENTE** :

$$I_1 = I_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad I_2 = I_{in} \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$$

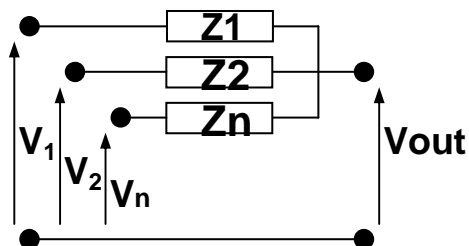
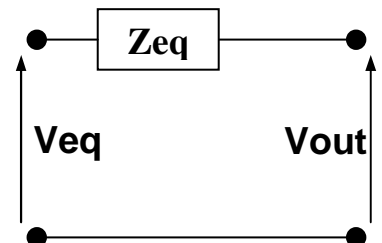


CIRCUITI EQUIVALENTI



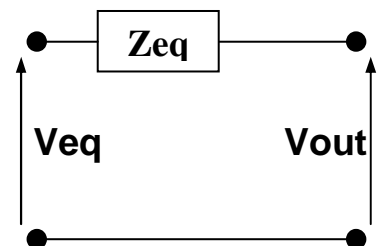
$$Z_{eq} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$V_{eq} = V_{in} \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = V_{in} \frac{Z_{eq}}{Z_1}$$

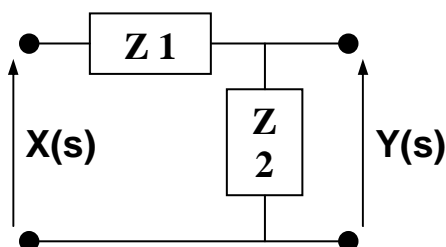


$$Z_{eq} = Z_1 \parallel Z_2 \parallel Z_n$$

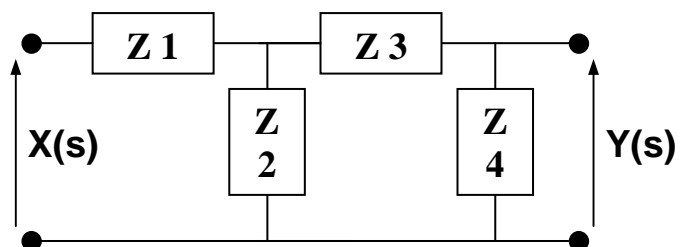
$$V_{eq} = \left(\frac{V_1}{Z_1} + \frac{V_2}{Z_2} + \frac{V_n}{Z_n} \right) \cdot Z_{eq}$$



UTILI FUNZIONI di TRASFERIMENTO (F D T) G(s) = Y(s) / X (s)



$$G(s) = Z_2 / (Z_1 + Z_2)$$



$$G(s) = Z_2 * Z_4 / [Z_1 * (Z_2 + Z_3 + Z_4) + Z_2 * (Z_3 + Z_4)]$$

L'applicazione della Trasformata di Laplace gioca un ruolo molto importante nella moderna **ELETTROTECNICA** dove, sostituendo a derivate ed integrali l'operatore s , è stato possibile definire delle **IMPEDENZE OPERAZIONALI** $Z(s)$, che semplificano notevolmente lo studio dei circuiti non solo in regime sinusoidale ma soprattutto in situazioni transitorie con forme d'onda qualsiasi ed arbitrariamente variabili nel tempo.

Elemento	Relazione $V = f(I)$	$Z(s)$	Equazione Differenze	Energia Accumulata	Potenza Dissipata
R	$V = R \cdot I$	R	$V = R I$	0	$R I^2$
C	$V = \frac{1}{C} \int I \cdot dt$	$\frac{1}{s \cdot C}$	$I = C \Delta V / \Delta t$	$\frac{1}{2} C V^2$	0
L	$V = L \cdot \frac{dI}{dt}$	$s \cdot L$	$V = L \Delta I / \Delta t$	$\frac{1}{2} L I^2$	0

Con il metodo delle Impedenze Operazionali ($Z = V / I$) basta sostituire ad ogni elemento la relativa $Z(s)$ e risolvere il circuito come se fosse in Corrente Continua ... ; consideriamo un circuito RC con in ingresso la tensione V_{in} e cerchiamo di determinare la tensione V_{out} al variare di V_{in} .

Per prima cosa sostituiamo gli elementi con le relative impedenze operazionali $Z1$ e $Z2$.



E noto che per un partitore di **resistenze** $Z1$ e $Z2$, in **corrente continua**: $V_{out} = V_{in} * Z2 / (Z1 + Z2)$

Ponendo $Z1 = R$ e $Z2 = 1 / s C$ e semplificando l'espressione algebrica, alla fine otteniamo:

$V_{out} = V_{in} * 1 / (1 + s R C)$ e dato che il prodotto $R C$ dà la costante di tempo T , otteniamo:

$V_{out} = V_{in} * 1 / (1 + s T)$ e se V_{in} è lo scalino unitario, $V_{in} = 1 / s$, e quindi otteniamo:

$V_{out} = 1 / (1 + s T) s$, che antitrasformata ci da la soluzione $Y = 1 - e^{-t/T}$

Se invece vogliamo la risposta ad un impulso unitario, basta porre $V_{in} = 1$, ottenendo:

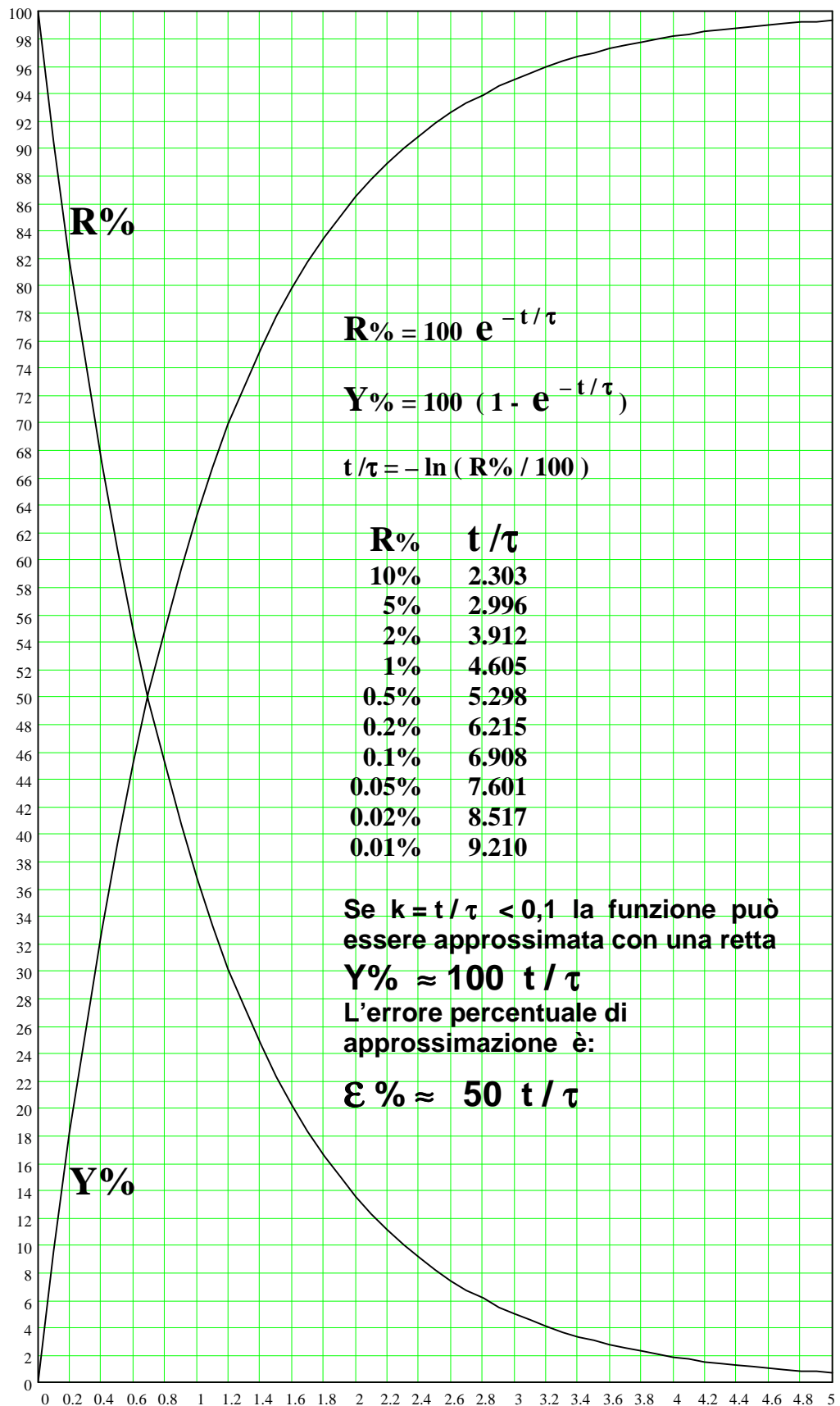
$V_{out} = 1 / (1 + s T)$, che antitrasformata ci da la soluzione $Y = e^{-t/T} / T$

Questa ultima funzione del tempo ci conferma che il nostro circuito RC è un Filtro Passa Basso del primo ordine (LPF 1) dato che la risposta all'impulso unitario viene ridotto di un fattore $1 / T$.

Importante notare che essendo l'impulso unitario definito come 1, **la risposta all'impulso unitario coincide con la FDT** del sistema; e questo semplifica notevolmente la trattazione dei sistemi dinamici dato che, dopo una certa esperienza, solo osservando la formula della FDT è possibile, già a colpo d'occhio capire come sarà la risposta del sistema, all'impulso o allo scalino o ad altre forme d'onda.

Il metodo delle Impedenze Operazionali, nato per l'Elettrotecnica, viene attualmente utilizzato in **quasi tutte le scienze**, dato che **quasi tutti i sistemi dinamici possono essere ricondotti a circuiti equivalenti elettrici** composti da R C L ed inoltre perché i più diffusi SW di simulazione come entry privilegiati hanno o **F D T** o **circuiti elettrici R C L** (che è meglio quindi conoscere bene !!!).

k_i	Y_i	R_i
0	0	100
0.1	9.516	90.484
0.2	18.127	81.873
0.3	25.918	74.082
0.4	32.968	67.032
0.5	39.347	60.653
0.6	45.119	54.881
0.7	50.341	49.659
0.8	55.067	44.933
0.9	59.343	40.657
1	63.212	36.788
1.1	66.713	33.287
1.2	69.881	30.119
1.3	72.747	27.253
1.4	75.340	24.66
1.5	77.687	22.313
1.6	79.810	20.19
1.7	81.732	18.268
1.8	83.470	16.53
1.9	85.043	14.957
2	86.466	13.534
2.1	87.754	12.246
2.2	88.920	11.08
2.3	89.974	10.026
2.4	90.928	9.072
2.5	91.792	8.208
2.6	92.573	7.427
2.7	93.279	6.721
2.8	93.919	6.081
2.9	94.498	5.502
3	95.021	4.979
3.1	95.495	4.505
3.2	95.924	4.076
3.3	96.312	3.688
3.4	96.663	3.337
3.5	96.980	3.02
3.6	97.268	2.732
3.7	97.528	2.472
3.8	97.763	2.237
3.9	97.976	2.024
4	98.168	1.832
4.1	98.343	1.657
4.2	98.500	1.5
4.3	98.643	1.357
4.4	98.772	1.228
4.5	98.889	1.111
4.6	98.995	1.005
4.7	99.090	0.91
4.8	99.177	0.823
4.9	99.255	0.745



Per i più pigri (o meglio per comodità) abbiamo riportato le **Frequenze di Taglio in Hz** per delle **costanti di tempo espresse in ms** ; tali costanti di tempo seguono i valori normalizzati **E96**.

T_a	f_a	T_b	f_b	T_c	f_c	T_d	f_d
1.00	159.155	1.78	89.413	3.16	50.365	5.62	28.319
1.02	156.034	1.82	87.448	3.24	49.122	5.76	27.631
1.05	151.576	1.87	85.110	3.32	47.938	5.90	26.975
1.07	148.743	1.91	83.327	3.40	46.810	6.04	26.350
1.10	144.686	1.96	81.202	3.48	45.734	6.19	25.712
1.13	140.845	2.00	79.577	3.57	44.581	6.34	25.103
1.15	138.396	2.05	77.637	3.65	43.604	6.49	24.523
1.18	134.877	2.10	75.788	3.74	42.555	6.65	23.933
1.21	131.533	2.15	74.026	3.83	41.555	6.81	23.371
1.24	128.351	2.21	72.016	3.92	40.601	6.98	22.802
1.27	125.319	2.26	70.423	4.02	39.591	7.15	22.259
1.30	122.427	2.32	68.601	4.12	38.630	7.32	21.742
1.33	119.665	2.37	67.154	4.22	37.714	7.50	21.221
1.37	116.171	2.43	65.496	4.32	36.841	7.68	20.723
1.40	113.682	2.49	63.918	4.42	36.008	7.87	20.223
1.43	111.297	2.55	62.414	4.53	35.134	8.06	19.746
1.47	108.269	2.61	60.979	4.64	34.301	8.25	19.292
1.50	106.103	2.67	59.609	4.75	33.506	8.45	18.835
1.54	103.347	2.74	58.086	4.87	32.681	8.66	18.378
1.58	100.731	2.80	56.841	4.99	31.895	8.87	17.943
1.62	98.244	2.87	55.455	5.11	31.146	9.09	17.509
1.65	96.458	2.94	54.134	5.23	30.431	9.31	17.095
1.69	94.175	3.01	52.875	5.36	29.693	9.53	16.700
1.74	91.468	3.09	51.506	5.49	28.990	9.76	16.307

Ad esempio se $T = 1.33 \text{ ms}$, otteniamo una frequenza di taglio di 119.665 Hz ...

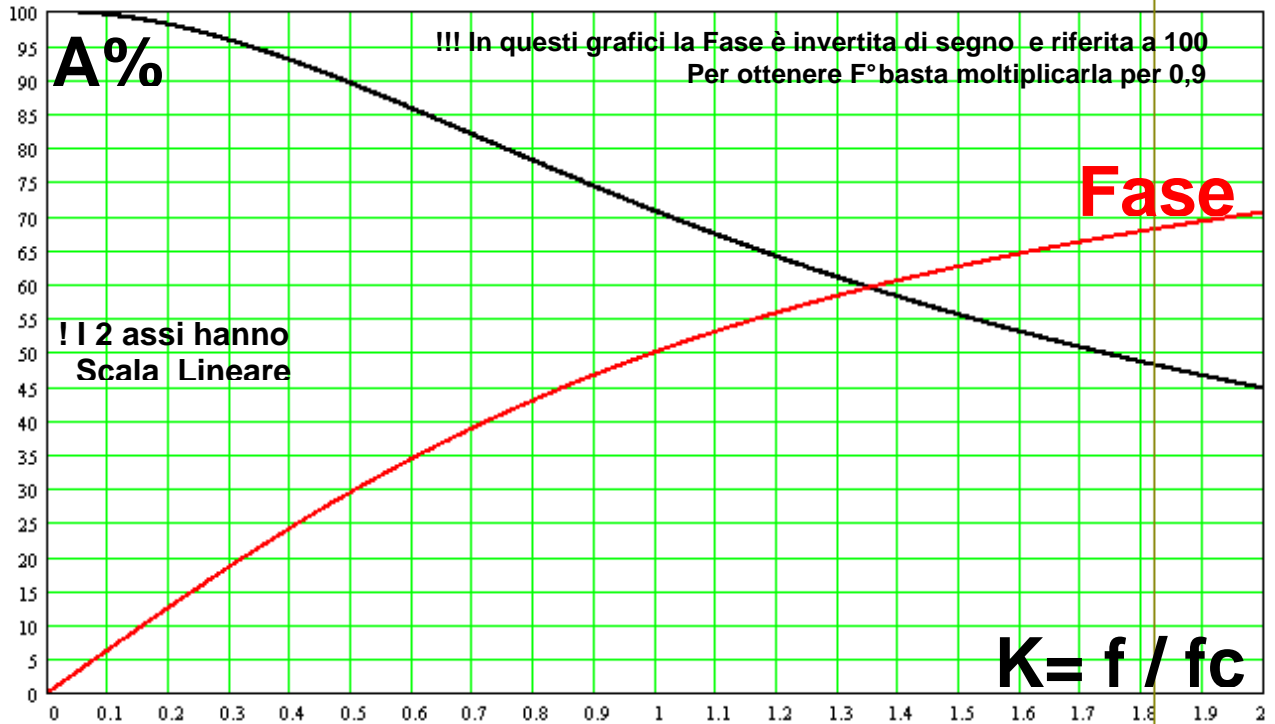
$T=1\text{ns} \rightarrow f_c = 159,155 \text{ MHz}$	$T=10\text{ns} \rightarrow f_c = 15,9155 \text{ MHz}$	$T=100\text{ns} \rightarrow f_c = 1,59155 \text{ MHz}$
$T=1\mu\text{s} \rightarrow f_c = 159,155 \text{ KHz}$	$T=10\mu\text{s} \rightarrow f_c = 15,9155 \text{ KHz}$	$T=100\mu\text{s} \rightarrow f_c = 1,59155 \text{ KHz}$
$T=1\text{ms} \rightarrow f_c = 159,155 \text{ Hz}$	$T=10\text{ms} \rightarrow f_c = 15,9155 \text{ Hz}$	$T=100\text{ms} \rightarrow f_c = 1,59155 \text{ Hz}$
$T=1\text{s} \rightarrow f_c = 159,155 \text{ mHz}$	$T=10\text{s} \rightarrow f_c = 15,9155 \text{ mHz}$	$T=100\text{s} \rightarrow f_c = 1,59155 \text{ mHz}$

Comunque ricordiamo che con **T** in **secondi** : $\omega_c = \frac{1}{T}$ [rad / s] $f_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot T}$ [Hz]

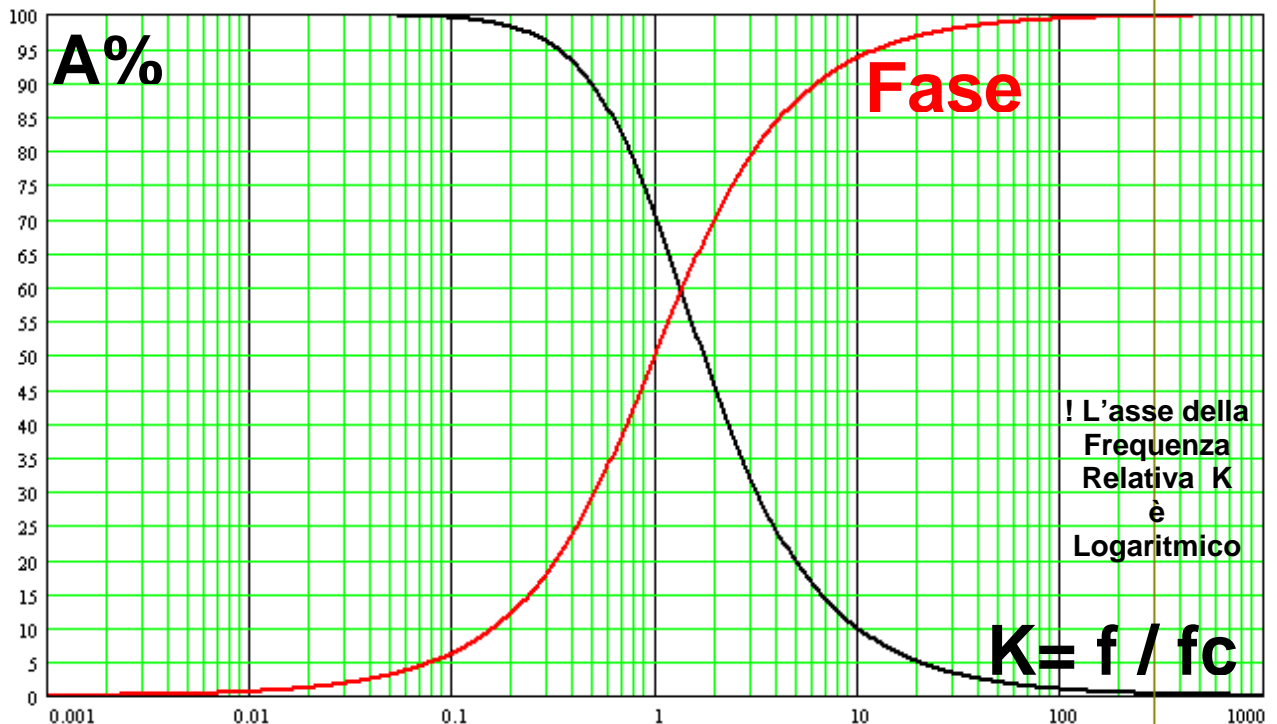
$$G(s) = 1 / (1 + s\tau)$$

La risposta in frequenza di un **LPF1** (Low Pass Filter del 1° Ordine) è definita da una **Frequenza di Taglio** $f_c = 1 / (2\pi\tau)$ dove il guadagno A è $\sqrt{2} \approx 0,707 \approx 70,7\%$ e la fase -45° (ritardo).

In termini Relativi, dato $K = f / f_c \rightarrow A\% = 100 / \sqrt{1 + K^2}$ $F^\circ = 180/\pi * \text{atan}(-K)$



Il grafico sottoriportato ci da una idea della Risposta in Frequenza per un ampio range di frequenze.



Nella pagina successiva vengono date delle tabelle numeriche ad alta risoluzione per valutare la risposta in frequenza in funzione di K , con guadagno $A\%$ e Fase F° già espressa in gradi.

A seconda delle preferenze e dei casi è a volte più utile la forma grafica o la forma tabellare.

$$G(s) = 1 / (1 + s\tau)$$

Queste Tabelle sono state calcolate con $K = f / f_c$ con incrementi relativi del **10%** (* 1,1 / step)

K	A%	F°	K	A%	F°	K	A%	F°
0,001266	99,99992	-0,072550	0,122846	99,25388	-7,003466	11,91818	8,361165	-85,20381
0,001393	99,99990	-0,079804	0,135131	99,09930	-7,695795	13,10999	7,605675	-85,63806
0,001532	99,99988	-0,087785	0,148644	98,91323	-8,454746	14,42099	6,917723	-86,03327
0,001685	99,99986	-0,096563	0,163508	98,68948	-9,286145	15,86309	6,291452	-86,39288
0,001854	99,99983	-0,106220	0,179859	98,42075	-10,19614	17,44940	5,721468	-86,72005
0,002039	99,99979	-0,116842	0,197845	98,09852	-11,19114	19,19434	5,202812	-87,01766
0,002243	99,99975	-0,128526	0,217629	97,71281	-12,27778	21,11378	4,730941	-87,28836
0,002468	99,99970	-0,141378	0,239392	97,25213	-13,46279	23,22515	4,301691	-87,53455
0,002714	99,99963	-0,155516	0,263331	96,70333	-14,75285	25,54767	3,911256	-87,75844
0,002986	99,99955	-0,171068	0,289664	96,05153	-16,15442	28,10244	3,556160	-87,96204
0,003284	99,99946	-0,188174	0,318631	95,28021	-17,67348	30,91268	3,233227	-88,14717
0,003613	99,99935	-0,206991	0,350494	94,37129	-19,31525	34,00395	2,939564	-88,31551
0,003974	99,99921	-0,227690	0,385543	93,30552	-21,08381	37,40434	2,672531	-88,46857
0,004371	99,99904	-0,250459	0,424098	92,06297	-22,98169	41,14478	2,429725	-88,60773
0,004809	99,99884	-0,275505	0,466507	90,62384	-25,00940	45,25926	2,208954	-88,73426
0,005289	99,99860	-0,303055	0,513158	88,96955	-27,16500	49,78518	2,008225	-88,84929
0,005818	99,99831	-0,333359	0,564474	87,08400	-29,44360	54,76370	1,825723	-88,95388
0,006400	99,99795	-0,366694	0,620921	84,95520	-31,83703	60,24007	1,659796	-89,04896
0,007040	99,99752	-0,403363	0,683013	82,57677	-34,33360	66,26408	1,508942	-89,13541
0,007744	99,99700	-0,443698	0,751315	79,94952	-36,91808	72,89048	1,371792	-89,21400
0,008519	99,99637	-0,488065	0,826446	77,08257	-39,57190	80,17953	1,247104	-89,28544
0,009370	99,99561	-0,536869	0,909091	73,99401	-42,27369	88,19749	1,133746	-89,35040
0,010307	99,99469	-0,590552	1	70,71068	-45	97,01723	1,030690	-89,40945
0,011338	99,99357	-0,649603	1,100000	67,26728	-47,72631	106,7190	0,937000	-89,46313
0,012472	99,99222	-0,714557	1,210000	63,70461	-50,42810	117,3909	0,851824	-89,51193
0,013719	99,99059	-0,786004	1,331000	60,06725	-53,08192	129,1299	0,774391	-89,55630
0,015091	99,98861	-0,864593	1,464100	56,40104	-55,66640	142,0429	0,703995	-89,59664
0,016600	99,98622	-0,951037	1,610510	52,75049	-58,16297	156,2472	0,639998	-89,63331
0,018260	99,98333	-1,046120	1,771561	49,15665	-60,55640	171,8719	0,581819	-89,66664
0,020086	99,97983	-1,150705	1,948717	45,65545	-62,83500	189,0591	0,528928	-89,69695
0,022095	99,97560	-1,265740	2,143589	42,27669	-64,99060	207,9651	0,480844	-89,72450
0,024304	99,97048	-1,392267	2,357948	39,04369	-67,01831	228,7616	0,437132	-89,74954
0,026735	99,96428	-1,531430	2,593742	35,97332	-68,91619	251,6377	0,397394	-89,77231
0,029408	99,95679	-1,684489	2,853117	33,07656	-70,68475	276,8015	0,361267	-89,79301
0,032349	99,94772	-1,852826	3,138428	30,35921	-72,32652	304,4816	0,328425	-89,81183
0,035584	99,93675	-2,037959	3,452271	27,82271	-73,84558	334,9298	0,298569	-89,82893
0,039143	99,92348	-2,241556	3,797498	25,46501	-75,24715	368,4228	0,271426	-89,84448
0,043057	99,90743	-2,465448	4,177248	23,28139	-76,53721	405,2651	0,246751	-89,85862
0,047362	99,88803	-2,711642	4,594973	21,26515	-77,72222	445,7916	0,224320	-89,87147
0,052099	99,86456	-2,982338	5,054470	19,40827	-78,80886	490,3707	0,203927	-89,88316
0,057309	99,83619	-3,279951	5,559917	17,70184	-79,80386	539,4078	0,185388	-89,89378
0,063039	99,80189	-3,607119	6,115909	16,13652	-80,71385	593,3486	0,168535	-89,90344
0,069343	99,76044	-3,966731	6,727500	14,70282	-81,54525	652,6834	0,153213	-89,91222
0,076278	99,71035	-4,361943	7,400250	13,39135	-82,30421	717,9518	0,139285	-89,92020
0,083905	99,64984	-4,796194	8,140275	12,19294	-82,99653	789,7470	0,126623	-89,92745
0,092296	99,57677	-5,273232	8,954302	11,09882	-83,62772	868,7217	0,115112	-89,93405
0,101526	99,48858	-5,797125	9,849733	10,10064	-84,20288	955,5938	0,104647	-89,94004
0,111678	99,38217	-6,372283	10,83471	9,190538	-84,72677	1051,153	0,095134	-89,94549

Questo è solo un semplice esempio; per calcolare la Risposta in Frequenza di una generica F.D.T :

- 1) Sostituire $j\omega$ all'operatore s
- 2) Calcolare le parti Reale & Immaginaria Re & Im
- 3) $A\% = 100 * \sqrt{(Re^2 + Im^2)}$
- 4) $F^\circ = 180/\pi * \text{atan}(Im / Re)$
- 5) Se si usano Frequenze Relative a $f_c \rightarrow$ Normalizzare in Frequenza

Per dimostrare la **generalità** del metodo d'uso delle impedenze operazionali , ci trasferiamo momentaneamente nel mondo della **Termodinamica** che a prima vista ha tutt'altre leggi di quelle della Elettrotecnica , ma ricordate ... la natura è una sola , e così pure le sue leggi sono universali.

ENERGIA $E [J] = P [W] * t [s]$ **POTENZA** $P [W] = E [J] / t [s] = E [J] * f [Hz]$
 $1 J = 1 Kg * 1 m = 1 W * s = 1 / 4186 KCal$ $1 KCal = 4186 J$ $1 W = 1 J / s = 0.86 KCal / h$

RENDIMENTO $\eta = P_{out} / P_{in} = 1 - (P_{in} - P_{out}) / P_{in} = 1 - P_d / P_{in}$

I sistemi termodinamici possono agevolmente essere studiati per **ANALOGIA** con i circuiti elettrici :

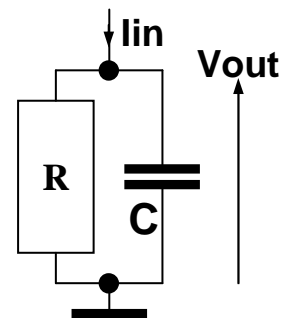
SISTEMA TERMODINAMICO	>>>	EQUIVALENTE ELETTRICO
Potenza Termica $P_{th} [W]$	>>>	Corrente $I [A]$
Sovratemperatura $\Theta [^{\circ}C]$	>>>	Tensione $V [V]$
Resistenza Termica $R_{th} [^{\circ}C/W]$	>>>	Resistenza $R [\Omega]$
Capacità Termica $C_{th} [Ws/^{\circ}C]$	>>>	Capacità $C [F]$

Dopo aver convertito un circuito termodinamico nell'equivalente elettrico , e possibile studiarlo anche dinamicamente adottando le impedenze operazionali (con l'operatore di Laplace s) già viste.

Supponiamo di avere un microprocessore veloce che dissipa **20 W** , il radiatore è dato con una Resistenza Termica di **$R_{th} = 2 \text{ }^{\circ}C/W$** e con capacità termica **$C_{th} = 30 W s / ^{\circ}C$** , calcolare la temperatura di regime , supponendo $T_{amb} = 35 \text{ }^{\circ}C$, e determinarne il transitorio di riscaldamento.

Per prima cosa ci costruiamo un circuito **EQUIVALENTE ELETTRICO** dove la $R = 2 \Omega$ rappresenta la via per dissipare la potenza verso l'ambiente e $C = 30 F$ è la capacità termica.

Il circuito è il parallelo di una R con un $1/s C$ e quindi la sua impedenza equivalente è data da $Z_{eq} = R / (1 + s RC)$, dove $RC = T$ è la costante di tempo del circuito (che nel nostro esempio è di 60 s) ; l'impedenza è quindi $Z_{eq} = R * 1 / (1 + s T)$, che si ridurrebbe alla sola R se C fosse 0. Quindi $V_{out} = I_{in} * R * 1 / (1 + s T)$, cioè la $F(s) = R * 1 / (1 + s T)$ A regime ,dopo che il condensatore si è completamente caricato (o se non ci fosse) avremo $I_{in} = 20 A$ e quindi $V_{out} = 40 V$; in un transitorio a scalino avremo la **solita esponenziale** , che dal valore 0 sale al 63.2% e cioè 25.285 V in 60 s (1 minuto) e con il passare del tempo raggiunge il valore di regime dopo 5 minuti (in pratica si considera a regime una esponenziale dopo 5 T).



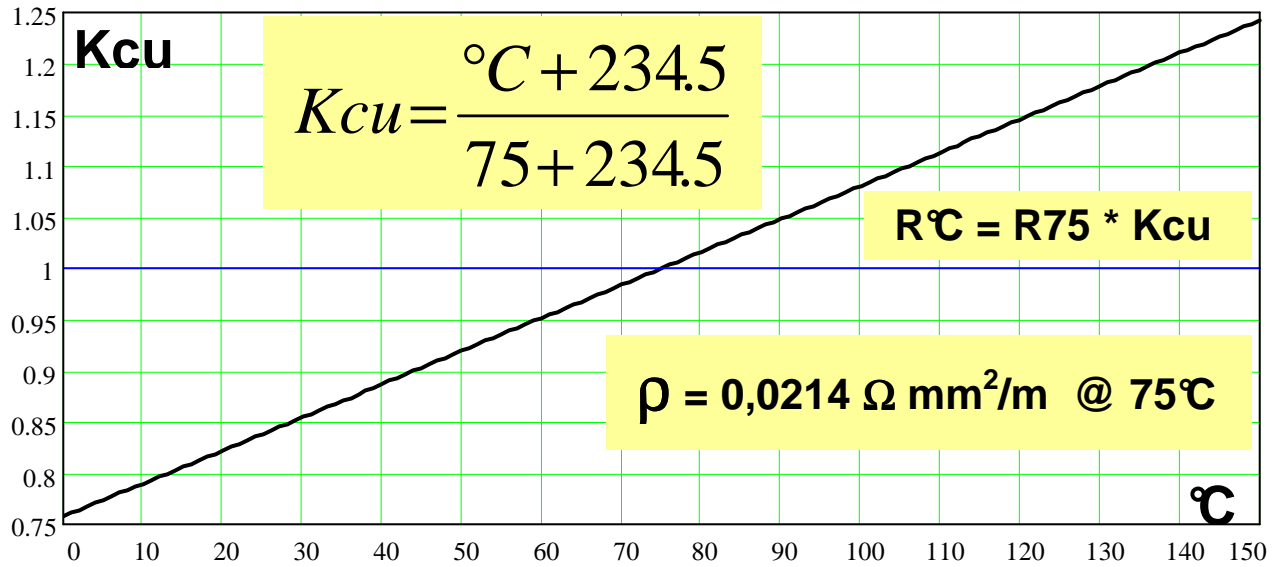
Ritorniamo al nostro problema , riconvertendo in unità Termodinamiche i dati ottenuti e tenendo conto che la sovratemperatura Θ è la differenza fra la temperatura dell'oggetto e la temperatura ambiente.

Il dissipatore inizialmente alla temperatura di 35° , raggiunge la temperatura di $60.285 \text{ }^{\circ}C$ dopo un minuto e con legge esponenziale raggiunge la temperatura di regime di 75° dopo circa 5 minuti. Nei primi secondi dopo l'accensione , la temperatura sale con un rate di ben $40^{\circ}C$ al minuto.

Un espertissimo Termodinamico non avrebbe potuto fare di meglio ... ma forse avrebbe fatto molti più calcoli ; se ne conoscete qualcuno sottoponetegli il problemino e forse ne vedrete delle belle ...

Da questo breve e semplice esempio emerge l'importanza di saper **studiare bene un modello elettrico** , anche in regime dinamico , perchè quando si è in grado di farlo (e bene !!!) , è possibile risolvere per **analogia un qualsiasi problema della Natura** di carattere lineare , ma **anche se non fosse lineare** lo si potrebbe sempre **linearizzare** in più punti di interesse ... esistono ormai molti metodi consolidati.

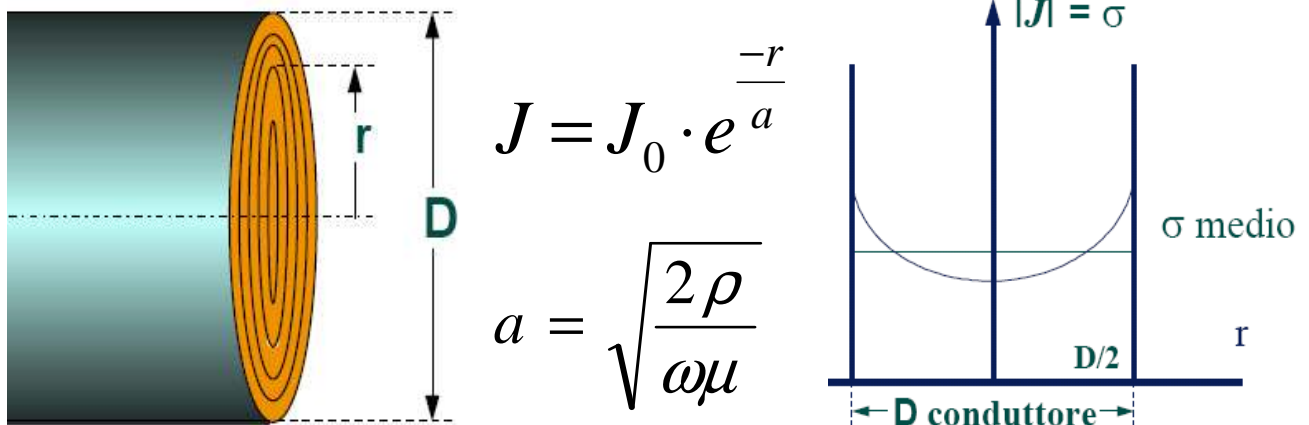
Con queste tabelle si può calcolare **R @ °C** partendo dal valore di R75 definito @ 75°C.



°C	Kcu	°C	Kcu	°C	Kcu	°C	Kcu	°C	Kcu
0	0.758	30	0.855	60	0.952	90	1.048	120	1.145
1	0.761	31	0.858	61	0.955	91	1.052	121	1.149
2	0.764	32	0.861	62	0.958	92	1.055	122	1.152
3	0.767	33	0.864	63	0.961	93	1.058	123	1.155
4	0.771	34	0.868	64	0.964	94	1.061	124	1.158
5	0.774	35	0.871	65	0.968	95	1.065	125	1.162
6	0.777	36	0.874	66	0.971	96	1.068	126	1.165
7	0.780	37	0.877	67	0.974	97	1.071	127	1.168
8	0.784	38	0.880	68	0.977	98	1.074	128	1.171
9	0.787	39	0.884	69	0.981	99	1.078	129	1.174
10	0.790	40	0.887	70	0.984	100	1.081	130	1.178
11	0.793	41	0.890	71	0.987	101	1.084	131	1.181
12	0.796	42	0.893	72	0.990	102	1.087	132	1.184
13	0.800	43	0.897	73	0.994	103	1.090	133	1.187
14	0.803	44	0.900	74	0.997	104	1.094	134	1.191
15	0.806	45	0.903	75	1.000	105	1.097	135	1.194
16	0.809	46	0.906	76	1.003	106	1.100	136	1.197
17	0.813	47	0.910	77	1.006	107	1.103	137	1.200
18	0.816	48	0.913	78	1.010	108	1.107	138	1.204
19	0.819	49	0.916	79	1.013	109	1.110	139	1.207
20	0.822	50	0.919	80	1.016	110	1.113	140	1.210
21	0.826	51	0.922	81	1.019	111	1.116	141	1.213
22	0.829	52	0.926	82	1.023	112	1.120	142	1.216
23	0.832	53	0.929	83	1.026	113	1.123	143	1.220
24	0.835	54	0.932	84	1.029	114	1.126	144	1.223
25	0.838	55	0.935	85	1.032	115	1.129	145	1.226
26	0.842	56	0.939	86	1.036	116	1.132	146	1.229
27	0.845	57	0.942	87	1.039	117	1.136	147	1.233
28	0.848	58	0.945	88	1.042	118	1.139	148	1.236
29	0.851	59	0.948	89	1.045	119	1.142	149	1.239

Un conduttore cilindrico avente diametro **D** può essere considerato come suddiviso in un elevato numero di conduttori coassiali elementari di uguale area, isolati fra loro e posti tutti elettricamente in parallelo. Il flusso concatenato con ogni singolo conduttore elementare, varia con la distanza dall'asse **r** del conduttore stesso, ed è massimo per il conduttore centrale e minimo per i conduttori più esterni ; quindi l'induttanza diminuisce passando dai conduttori elementari situati vicino all'asse, ai conduttori elementari situati alla periferia del conduttore cilindrico.

Pertanto la corrente alternata, e quindi la **densità di corrente**, dovendosi distribuire fra i conduttori elementari in ragione inversa della relativa impedenza, sarà **massima alla periferia**, dove la reattanza è minima, e **minore nella zona centrale** dove la reattanza è maggiore.



La variazione di densità di corrente segue una legge esponenziale il cui esponente è il rapporto fra la distanza dal centro **r** e la distanza di penetrazione **a** ; **a** dipenda da **ρ** , **ω** , **μ** (vedi sopra).

La **distanza di penetrazione** [dimensionalmente è una lunghezza] è quindi **quella distanza dal centro dove la densità di corrente si riduce di un fattore 1 / e ≈ 0,368**.

Per il **Rame** si adotta la semplice formula precalcolata : $a_{cu} [mm] \approx \frac{66}{\sqrt{f [Hz]}}$

Lo studio per ricavare una formula esatta che ci dia il rapporto fra la resistenza in alternata sinusoidale **R_{AC}** ad una certa frequenza e la resistenza **R_{DC}** in corrente continua è molto complesso ; per tale ragione è prassi comune utilizzare formule approssimate ma sufficientemente atte allo scopo.

$$\frac{R_{AC}}{R_{DC}} = 1 + \frac{1}{768} \cdot \left(\frac{D}{a_{cu}} \right)^4 = 1 + f^2 [KHz] \cdot D^4 [mm] \cdot 68,622 \cdot 10^{-6}$$

L'ultima espressione ci dice chiaramente che l' **Incremento Relativo di Resistenza** è proporzionale al **quadrato della Frequenza** ed alla **quarta potenza del Diametro** ; nella pagina successiva troverete dei grafici per poter calcolare a colpo d'occhio il diametro minimo del conduttore tondo in rame da utilizzare per una certa frequenza per ottenere un certo incremento percentuale.

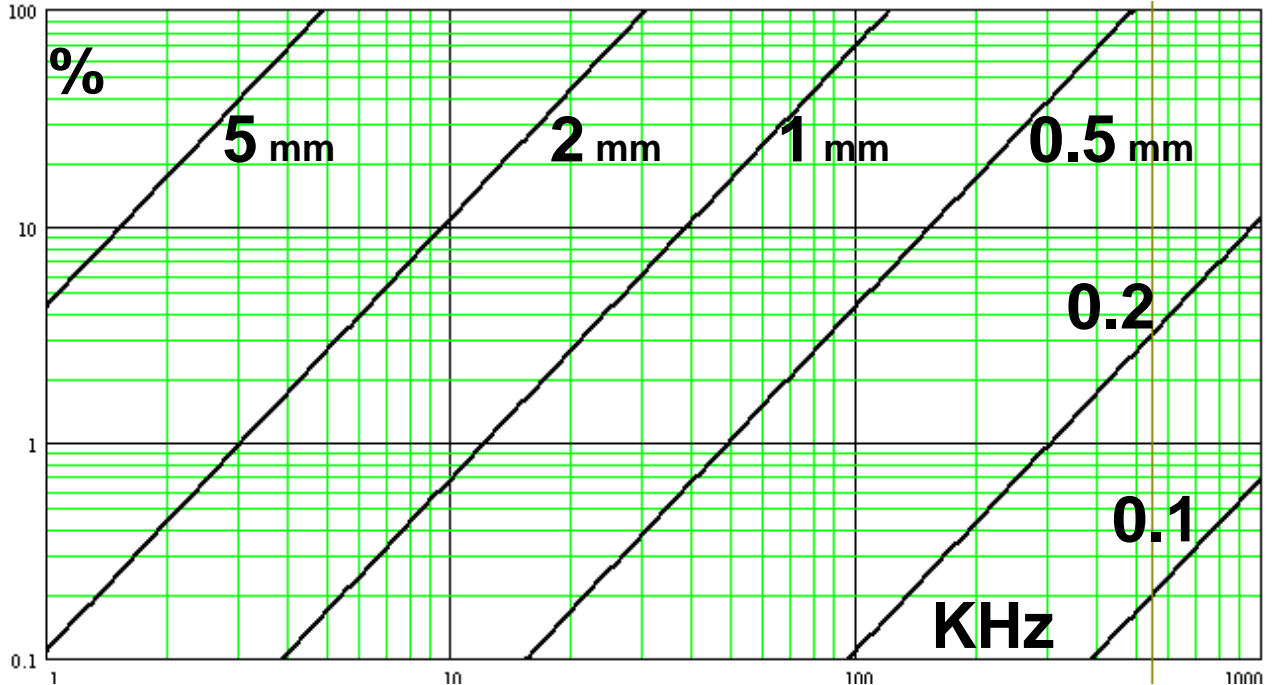
NB! Operando con correnti non sinusoidali avremo Armoniche di Corrente che potranno avere frequenze molto più alte della fondamentale, queste Armoniche tenderanno quindi ad addensarsi sulla superficie esterna del conduttore provocando un maggior riscaldamento dello stesso ; in questi casi si consiglia quindi di non eccedere nella densità di corrente di progetto (Es. max 3 A/ mm²) ed utilizzare un basso incremento percentuale alla frequenza operativa che è la frequenza della fondamentale.

Una scelta consigliata è quella dello 1% per la Fondamentale **1% → R_{AC} = R_{DC} * 1,01** ; sotto questa ipotesi avremo per la 3° → 1,09, 5° → 1,25, 7° → 1,49, 9° → 1,81, 11° → 2,21, N° → 1 + N²/100 ; ma dato che al crescere dell'ordine di armonicità le ampiezze diminuiscono , per una onda quadra avremo : 3° → 1,03 , 5° → 1,05 , N° → 1 + N/100 mentre per una triangolare tutte le armoniche avranno 1,01.

$$R_{AC} = R_{DC} * (1 + \% / 100)$$

In questo primo grafico viene dato l' Incremento Percentuale della R in funzione della frequenza [KHz] per conduttori in rame tondi di diametro D [mm].

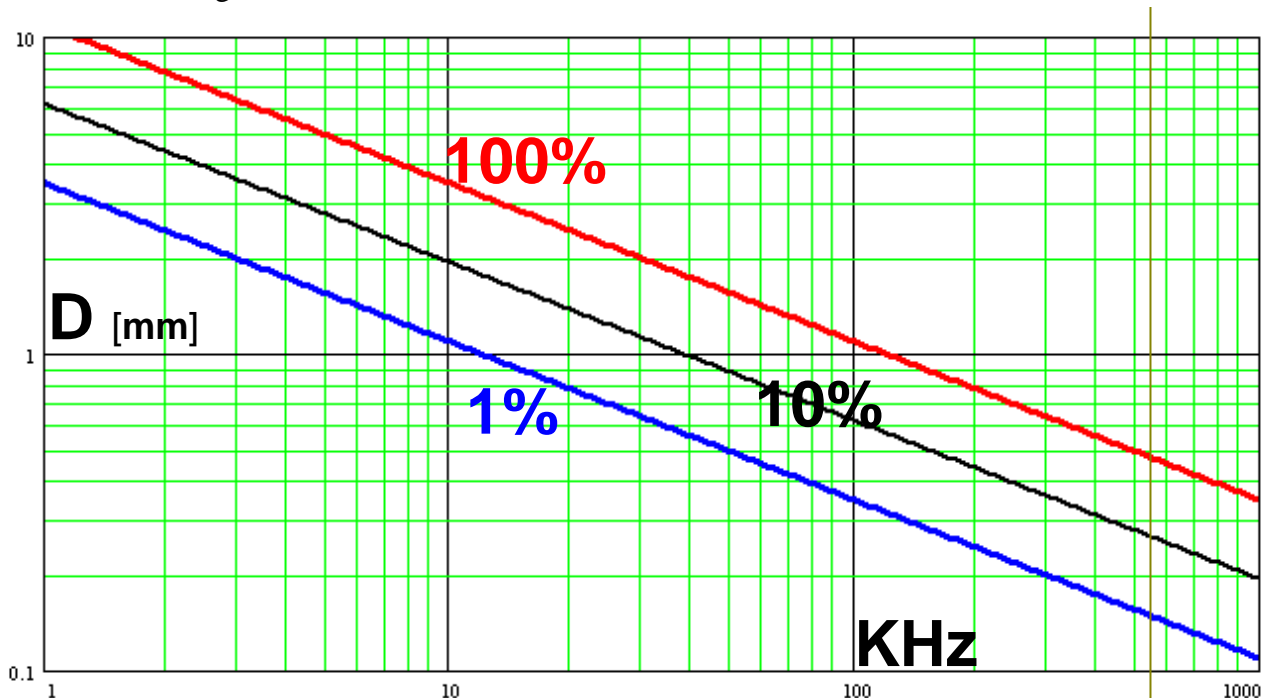
NB! 100% → $R_{AC} = R_{DC} * 2$ 10% → $R_{AC} = R_{DC} * 1,1$ 1% → $R_{AC} = R_{DC} * 1,01$



Es. Per un conduttore in rame di Diametro 1 mm , a 100 KHz , $R_{AC} = R_{DC} * 1,7$

Il grafico sottoriportato permette di determinare il Diametro Minimo [mm] per ottenere un certo Incremento Percentuale , in funzione della frequenza [KHz] operativa.

Es. Ritenendo consigliabile un Incremento dello 1% , a 50 KHz , otteniamo $D = 0,5$ mm



Notare come, per un certo Diametro , l'incremento percentuale della R vari con il quadrato di f !!!
Per $D = 1$ mm , il rapporto R_{AC} / R_{DC} è 1,01 @ 12,6 KHz , 1,1 @ 40 KHz , 2 @ 126 KHz
Fortunatamente l'incremento percentuale è proporzionale a D^4 e quindi, se ad esempio dimezziamo il Diametro , otterremo un incremento percentuale 16 volte minore !!!

Vettore **RIGA** $(R_1 \ R_2 \ R_3)$ Vettore **COLONNA** $\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$ Matrice **QUADRATA** $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$

TRIANGOLARE $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ 0 & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$ **DIAGONALE** $\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}$ **UNITARIA** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Una matrice è **SIMMETRICA** se per tutti gli indici i & j si ha $A_{ij} = A_{ji}$

La **TRASPOSTA** di una matrice si ottiene scambiando ordinatamente le righe con le colonne ; un vettore riga trasposto diventa un vettore colonna e viceversa

Matrice **TRASPOSTA** $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$

Il **DETERMINANTE** di una matrice quadrata è un singolo elemento

$$\det(A) = A_{11} \cdot A_{22} \cdot A_{33} - A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{32} - A_{21} \cdot A_{12} \cdot A_{33} + A_{21} \cdot A_{13} \cdot A_{32} + A_{31} \cdot A_{12} \cdot A_{23} - A_{31} \cdot A_{13} \cdot A_{22}$$

La **INVERSA** di una matrice è il prodotto del determinante per una matrice dello stesso ordine

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \det(A) \cdot \begin{bmatrix} A_{22} \cdot A_{33} - A_{23} \cdot A_{32} & -A_{12} \cdot A_{33} + A_{13} \cdot A_{32} & A_{12} \cdot A_{23} - A_{13} \cdot A_{22} \\ -A_{21} \cdot A_{33} + A_{23} \cdot A_{31} & A_{11} \cdot A_{33} - A_{13} \cdot A_{31} & -A_{11} \cdot A_{23} + A_{13} \cdot A_{21} \\ A_{21} \cdot A_{32} - A_{22} \cdot A_{31} & -A_{11} \cdot A_{32} + A_{12} \cdot A_{31} & A_{11} \cdot A_{22} - A_{12} \cdot A_{21} \end{bmatrix}$$

Il **PRODOTTO** di una matrice per uno **scalare N** è la matrice di tutti gli elementi moltiplicati per N

Il **PRODOTTO** di una matrice per una **matrice** dello stesso ordine è una matrice

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} + A_{13} \cdot B_{31} & A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} + A_{13} \cdot B_{32} & A_{11} \cdot B_{13} + A_{12} \cdot B_{23} + A_{13} \cdot B_{33} \\ A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} + A_{23} \cdot B_{31} & A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22} + A_{23} \cdot B_{32} & A_{21} \cdot B_{13} + A_{22} \cdot B_{23} + A_{23} \cdot B_{33} \\ A_{31} \cdot B_{11} + A_{32} \cdot B_{21} + A_{33} \cdot B_{31} & A_{31} \cdot B_{12} + A_{32} \cdot B_{22} + A_{33} \cdot B_{32} & A_{31} \cdot B_{13} + A_{32} \cdot B_{23} + A_{33} \cdot B_{33} \end{bmatrix}$$

!!! NON vale la proprietà COMMUTATIVA : $A * B \neq B * A$

Il **PRODOTTO** $A [r,n] * B [n,c]$ di matrici di ordine diverso è possibile **solo** se il numero di colonne di A è uguale al numero di righe di B ed il prodotto è una matrice **M [r,c]**.

V. Riga * V. Colonna = 1 elemento

$$(R_1 \ R_2 \ R_3) \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = R_1 \cdot V_1 + R_2 \cdot V_2 + R_3 \cdot V_3$$

V.Colonna * V.Riga = Matrice [r,c]

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \cdot (R_1 \ R_2 \ R_3) = \begin{bmatrix} R_1 \cdot V_1 & V_1 \cdot R_2 & V_1 \cdot R_3 \\ V_2 \cdot R_1 & R_2 \cdot V_2 & V_2 \cdot R_3 \\ V_3 \cdot R_1 & V_3 \cdot R_2 & R_3 \cdot V_3 \end{bmatrix}$$

Vettore Riga * Matrice = Vettore Riga

$$(R_1 \ R_2 \ R_3) \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = (R_1 \cdot A_{11} + R_2 \cdot A_{21} + R_3 \cdot A_{31} \quad R_1 \cdot A_{12} + R_2 \cdot A_{22} + R_3 \cdot A_{32} \quad R_1 \cdot A_{13} + R_2 \cdot A_{23} + R_3 \cdot A_{33})$$

Matrice * Vettore Colonna = Vettore Colonna

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \cdot V_1 + A_{12} \cdot V_2 + A_{13} \cdot V_3 \\ A_{21} \cdot V_1 + A_{22} \cdot V_2 + A_{23} \cdot V_3 \\ A_{31} \cdot V_1 + A_{32} \cdot V_2 + A_{33} \cdot V_3 \end{bmatrix}$$

SISTEMI di EQUAZIONI

Il calcolo matriciale è molto utile per la soluzione di un **Sistema di N Equazioni Lineari in N incognite** con **procedura simbolica** ed **esecuzione automatica** con tools di calcolo.

$$A_{11} \cdot X_1 + A_{12} \cdot X_2 + A_{13} \cdot X_3 = C_1$$

$$A_{21} \cdot X_1 + A_{22} \cdot X_2 + A_{23} \cdot X_3 = C_2$$

$$A_{31} \cdot X_1 + A_{32} \cdot X_2 + A_{33} \cdot X_3 = C_3$$

Il sistema dato è equivalente a :

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix}$$

In forma simbolica possiamo scrivere solamente **A * X = C** e quindi risolvere rispetto ad X ottenendo :

$$\mathbf{X} = \mathbf{C} / \mathbf{A} = \mathbf{A}^{-1} * \mathbf{C}$$

In pratica si forma la matrice quadrata dei coefficienti **A**, se ne calcola l'inversa e la si moltiplica per il vettore colonna dei termini noti **C**, ottenendo il vettore colonna delle soluzioni **X**.

Nato a Milano il 29-04-1948 , già ai tempi del liceo progettava e costruiva semplici dispositivi elettronici.

Durante gli studi universitari progetta e realizza controlli di potenza per illuminazione per vari artisti milanesi e collabora con vari complessi musicali nel settore della musica elettronica ; è stato il primo in Italia ad introdurre il sintetizzatore.

Si laurea in **INGEGNERIA ELETTROTECNICA** (sezione MACCHINE) nel **1972** al **POLITECNICO di MILANO**.
Già dal 1970 progettava e realizzava circuiti elettronici di controllo utilizzati dai suoi stessi professori in ambito di ricerca (Prof. CAMPANARI - PETRECCA - VISTOLI - BRANDOLINI - CREPAZ - MANIGRASSO - SUPERTI FURGA) ; durante queste collaborazioni acquisisce moltissime nozioni sulle macchine elettriche , gli azionamenti ed i controlli ed è stimato per la sua competenza in ambito elettronico e per la sua spinta tendenza all'innovazione.

Dopo la laurea resta per alcuni anni al POLITECNICO come assistente del Prof. MANIGRASSO con l'incarico di assistente alle esercitazioni di **ELETTROTECNICA INDUSTRIALE**.

Nel **73** realizza il controllo dell'inverter trifase di trazione per auto elettrica sviluppato dai famosi antesignani dei moderni azionamenti Prof. PETRECCA e Prof. CAMPANARI , pionieri , con il Prof. MANIGRASSO della **Teoria unificata della Macchine Elettriche Rotanti** ormai riconosciuta ed utilizzata a livello mondiale.

Ottiene l'abilitazione (100 / 100) all'insegnamento di **ELETTROTECNICA** ed ottiene la cattedra presso l'istituto GALVANI di Milano dove insegna per alcuni anni nei corsi serali (il giorno viene dedicato alla progettazione).

Dal **77** in poi si dedica **esclusivamente alla progettazione** di sistemi elettronici come consulente per varie aziende , come progettista all'inizio e come project-manager in seguito , per molte ditte fra le quali: SIEMENS MEDICALI , CARLO ERBA STRUMENTAZIONE , THERMO , ERCOLE MARELLI TRAZIONE , FIREMA , Etra MERCEDES , BSH , XILINX ; in circa **40** anni sviluppa o coordina con successo oltre **200 progetti innovativi e strategici**.

Nell' 89 , per un azionamento a GTO per motore asincrono di altissima potenza , ha collaborato (ricevendone i complimenti) con il Prof. T.A. **Lipo** della University of Wisconsin (padre delle attuali teorie sui controlli vettoriali ad orientamento di campo FOC).

Ha al suo attivo la proprietà intellettuale di alcuni brevetti , il decoder SDSP dello standard IEC inerente il TCN (Train Communication Network) , algoritmi per il calcolo veloce di regressioni polinomiali e numerosi algoritmi ottimizzati.

E' stato socio AEI , IEEE , MENSA ed è tuttora annoverato nello U.S. Inventors listing.

Attualmente , in qualità di Senior Algorithmist Engineer per XILINX , elabora algoritmi innovativi orientati al futuro.

Tra i progetti più significativi ricordiamo il controllo dei chopper ausiliari dello ETR500 , l'azionamento di trazione del TAF , Circumetnea , TSR , Nuove Metropolitane , i metodi di controllo motori OFP (Optimal Flux Positioning) , i sistemi di termoregolazione a riscaldamento diretto per gascromatografia , sistemi autotuning di riscaldamento ad induzione ad alto rendimento , metodi innovativi per la misura in real-time di armoniche di linea ed armoniche di coppia.

E' stato ed è tuttora coinvolto in numerosi **progetti di ricerca** europei e nazionali , sempre con risultati soddisfacenti.

Collabora in qualità di esperto per la microelettronica o responsabile scientifico con diversi enti universitari e di ricerca.

E' molto stimato in ambiente tecnico per la sua innata capacità di spiegare in modo chiaro e semplice anche i concetti più complessi ; questa preziosa dote deriva , oltre che da una preparazione teorica vasta e completa , da un pluridecennale dialogo costruttivo con tecnici di tutti i livelli , dal semplice perito al professore universitario.

Sa adeguare il linguaggio al livello degli interlocutori (di qualsiasi formazione) per ottenere il massimo travaso di know-how in tempi molto brevi ed inoltre non perde mai di vista il vero e fondamentale aspetto pratico del problema.

Ha due figlie , Roberta la sapiente e Manuela la bella.

E' nonno della piccola ma vulcanica Alice.

Si rilassa praticando sci agonistico e parapendio.



CAMPI SPECIFICI DI COMPETENZA:

Elettrotecnica , Motori e relativi Azionamenti , Elettronica di segnale e di bassa potenza sia analogica che digitale , Microcontrollori , Custom Real-Time Operating-System dedicati , Algoritmistica classica ed innovativa , Calcolo numerico , DSP , Sistemi Esperti & Intelligenza Artificiale , Controlli automatici lineari e non lineari ed innovativi , Controllori digitali innovativi , Simulazione di processi fisici , Simulazione del Software e degli algoritmi , Integrità del SW , Sistemi dinamici , Identificazione parametrica , Protocolli di comunicazione dedicati , Problematiche EMI / EMC , Coordinazione di team di progetto , Corsi di formazione e di aggiornamento , Relazioni tecniche e scientifiche di processi e di progetti , Custom Hi-Eff Algorithms.